

## CÁC BƯỚC KHẢO SÁT ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC 3

### A. Lý thuyết

#### I- SƠ ĐỒ CHUNG KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ.

##### 1. Tập xác định.

##### 2. Sự biến thiên

###### *2.1 Xét chiều biến thiên của hàm số*

- + Tính đạo hàm  $y'$
- + Tìm các điểm mà tại đó đạo hàm  $y'$  bằng 0 hoặc không xác định
- + Xét dấu đạo hàm  $y'$  và suy ra chiều biến thiên của hàm số.

###### *2.2 Tìm cực trị*

*2.3 Tìm các giới hạn tại vô cực ( $x \rightarrow \pm\infty$ ), các giới hạn có kết quả là vô cực và tìm tiệm cận nếu có.*

###### *2.4 Lập bảng biến thiên.*

Thể hiện đầy đủ và chính xác các giá trị trên bảng biến thiên.

##### 3. Đồ thị

- Giao của đồ thị với trục Oy:  $x=0 \Rightarrow y=? \Rightarrow (0;?)$
- Giao của đồ thị với trục Ox:  $y=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x=? \Rightarrow (?;0)$
- Các điểm CĐ; CT nếu có.

**(Chú ý:** nếu nghiệm bấm máy tính được thì bấm, nghiệm lẻ giải tay được thì phải giải ra- chẳng hạn phương trình bậc 2, còn nghiệm lẻ mà không giải được thì ghi ra giấy nháp cho biết giá trị để khi vẽ cho chính xác- không ghi trong bài- chẳng hạn hàm bậc 3)

- Lấy thêm một số điểm (nếu cần)- (điều này làm sau khi hình dung hình dạng của đồ thị. Thiếu bên nào học sinh lấy điểm phía bên đó, không lấy tùy tiện mất thời gian.)

- Nhận xét về đặc trưng của đồ thị. Điều này sẽ cụ thể hơn khi đi vẽ từng đồ thị hàm số.

#### II- SƠ ĐỒ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM BẬC BA: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ( $a \neq 0$ ).

## 1. Tập xác định. $D=R$

## 2. Sự biến thiên

### **2.1 Xét chiều biến thiên của hàm số**

- + Tính đạo hàm:
- + ( Bấm máy tính nếu nghiệm chẵn, giải nếu nghiệm lẻ- không được ghi nghiệm gần đúng)
- + Xét dấu đạo hàm  $y'$  và suy ra chiều biến thiên của hàm số.

### **2.2 Tìm cực trị**

### **2.3 Tìm các giới hạn tại vô cực ( $x \rightarrow \pm\infty$ )**

(Hàm bậc ba và các hàm đa thức không có TCD và TCN.)

### **2.4 Lập bảng biến**

Thể hiện đầy đủ và chính xác các giá trị trên bảng biến thiên.

## 3. Đồ thị

- Giao của đồ thị với trục Oy:  $x=0 \Rightarrow y=d \Rightarrow (0; d)$
- Giao của đồ thị với trục Ox:  $y=0 \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Leftrightarrow x = ?$
- Các điểm CĐ; CT nếu có.

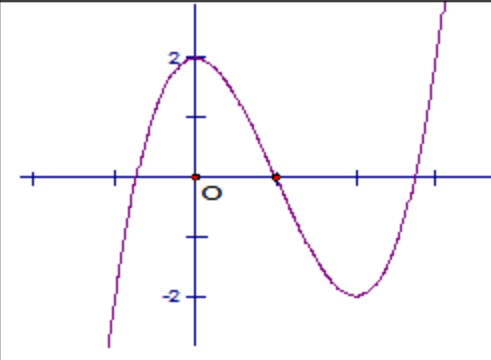
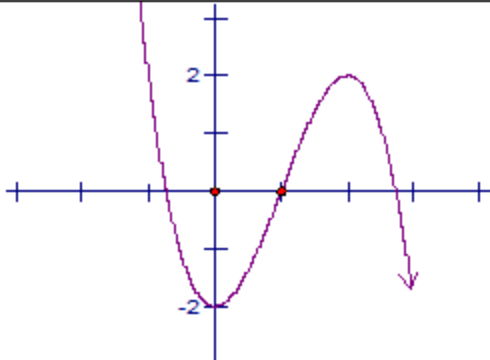
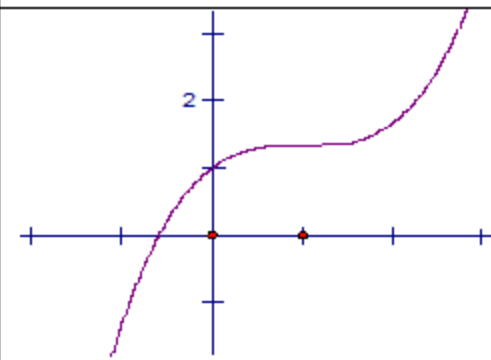
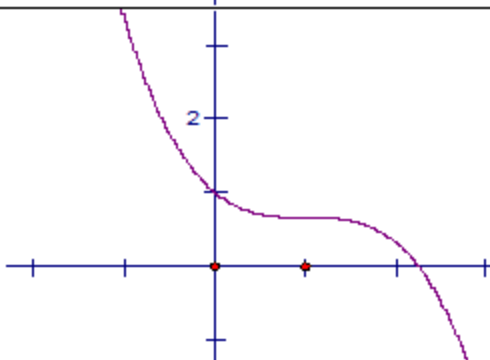
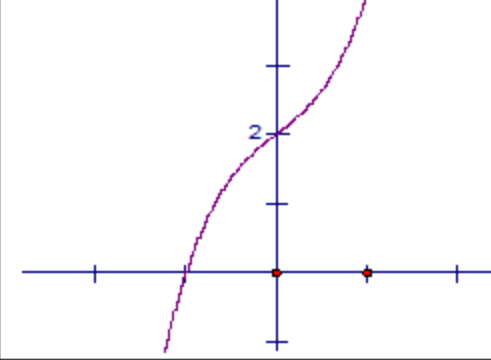
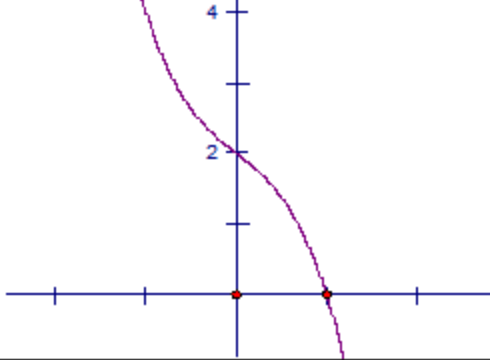
**(Chú ý:** nếu nghiệm bấm máy tính được 3 nghiệm thì ta bấm máy tính, còn nếu được 1 nghiệm nguyên thì phải đưa về tích của một hàm bậc nhất và một hàm bậc hai để giải nghiệm. Trường hợp cả ba nghiệm đều lẻ thì chỉ ghi ra ở giấy nháp để phục vụ cho việc vẽ đồ thị)

- Lấy thêm một số điểm (nếu cần)- (điều này làm sau khi hình dung hình dạng của đồ thị. Thiếu bên nào học sinh lấy điểm phía bên đó, không lấy tùy tiện mất thời gian.)

- Nhận xét về đặc trưng của đồ thị. Hàm bậc ba nhận điểm làm tâm đối xứng.

- + Trong đó:  $x_0$  là nghiệm của phương trình  $y'' = 0$  (đạo hàm cấp hai bằng 0)
- + Điểm I được gọi là ‘**điểm uốn**’ của đồ thị hàm số.

**Các dạng đồ thị hàm số bậc 3:  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a \neq 0$ )**

Dấu của a Dấu $\Delta$	$a > 0$	$a < 0$
Pt $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.		
Pt $y' = 0$ có nghiệm kép		
Pt $y' = 0$ vô nghiệm		

## B. Ví dụ minh họa

**Ví dụ 1:** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số :  $y = x^3 + 3x^2 - 4$

**1. Tập xác định**  $D = \mathbb{R}$

**2. Sự biến thiên**

+)Giới hạn hàm số tại vô cực

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

+) Chiều biến thiên:

$$y' = 3x^2 + 6x$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Hàm số đồng biến trong khoảng  $(-\infty; -2)$  và  $(0; +\infty)$

Hàm số nghịch biến trong khoảng  $(-2; 0)$

+) Cực trị

Hàm số đạt cực đại tại  $x = -2; y_{CD} = y(-2) = 0$

Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 0; y_{CT} = y(0) = -4$

+) Lập bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$y'$	+	0	-	0
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$

### 3. Đồ thị

Giao của đồ thị với trục Ox:  $y = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy  $(-2; 0)$  và  $(1; 0)$  là các giao điểm của đồ thị với trục Ox

Giao điểm của đồ thị với trục Oy:  $x = 0 \Leftrightarrow y = -4$ . Vậy  $(0; -4)$  là giao điểm của đồ thị với trục Oy.

Bảng giá trị :

x	-2	-1	0	1
y	0	-2	-4	0

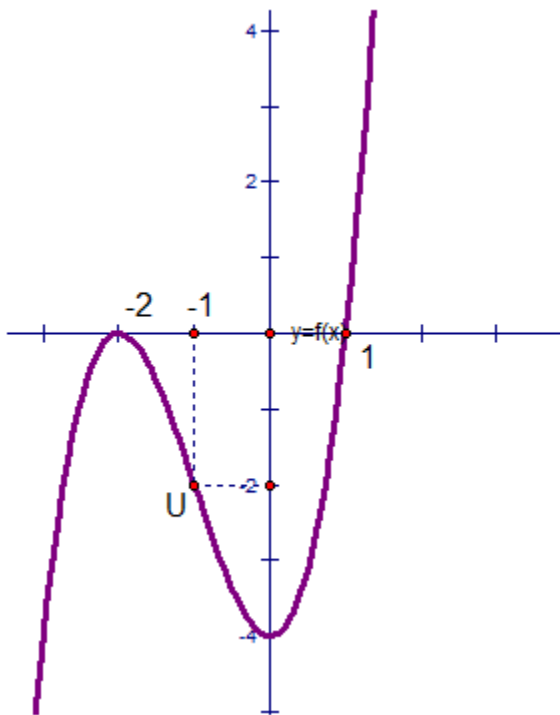
Tìm điểm uốn

$$y'' = 6x + 6$$

$$\text{Cho } y'' = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -2$$

Đồ thị hàm số có điểm uốn :  $U(-1, -2)$

Vẽ đồ thị (C) :



Kết luận: Đồ thị hàm số bậc 3 đã cho nhận điểm  $U(-1; -2)$  làm tâm đối xứng.

**C. Một số bài tập trong đề thi đại học**

**NĂM 2010 :**

**Câu 1 (3,0 điểm).** Cho hàm số  $y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$ .

- 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.
- 2) Tìm các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^3 - 6x^2 + m = 0$  có 3 nghiệm thực phân biệt.

1. (2,0 điểm)	
a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ .	0,25
b) Sự biến thiên:  • Chiều biến thiên: $y' = \frac{3}{4}x^2 - 3x$ . Ta có:  $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}; y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 4 \end{cases} \text{ và } y' < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4.$  Do đó: + Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(4; +\infty)$ ; + Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$ .	0,50
• Cực trị: + Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{\text{CD}} = y(0) = 5$ ; + Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 4$ và $y_{\text{CT}} = y(4) = -3$ .	0,25
• Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ .	0,25

• Bảng biến thiên:		0,25
$x$	$-\infty$ 0      4 $+\infty$	
$y'$	$+$ 0 $-$ 0 $+$	
$y$	$-\infty$ $\nearrow$ 5 $\searrow$ -3 $\nearrow$ $+\infty$	

c) Đồ thị (C):		0,50
----------------	--	------

**2. (1,0 điểm)**

Xét phương trình: $x^3 - 6x^2 + m = 0$ (*). Ta có:	0,25
$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5 = 5 - \frac{m}{4}.$	

Do đó:	0,25
(*) có 3 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = 5 - \frac{m}{4}$ cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt	

$\Leftrightarrow -3 < 5 - \frac{m}{4} < 5 \Leftrightarrow 0 < m < 32.$	0,50
--	------

**D. Bài tập vận dụng**

**Bài 1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:  $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

- Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$
- Đạo hàm:  $y' = 3x^2 - 6x + 3$
- Cho  $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- Giới hạn:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$
- Bảng biến thiên

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$y'$	$+$	$0$	$+$
$y$	$-\infty$	$1$	$+\infty$

• Hàm số đồng biến trên cả tập xác định; hàm số không đạt cực trị.

•  $y'' = 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$ ; Điểm uốn là  $I(1;1)$

• Giao điểm với trục hoành:

$$\text{Cho } y = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

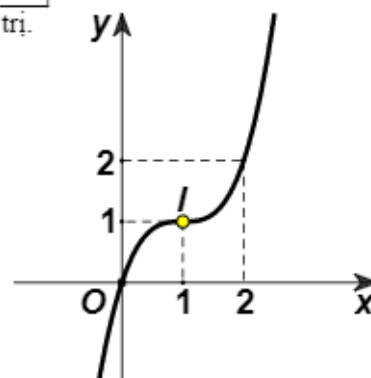
Giao điểm với trục tung:

$$\text{Cho } x = 0 \Rightarrow y = 0$$

• Bảng giá trị:

$x$	$0$	$1$	$2$
$y$	$0$	$1$	$2$

• Đồ thị hàm số (như hình vẽ bên đây):



**Bài 2.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số:  $y = (1-x)^2(4-x)$ .

**Giải:**

$$y = (1-x)^2(4-x) = (1-2x+x^2)(4-x) = 4-x-8x+2x^2+4x^2-x^3 = -x^3+6x^2-9x+4$$

$$y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$$

- Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$
- Đạo hàm:  $y' = -3x^2 + 12x - 9$
- Cho  $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$
- Giới hạn:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$



• Bảng biến thiên:

$x$	$-\infty$	1	3	$+\infty$			
$y'$	-	0	+	0	-		
$y$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

• Hàm số đồng biến trên khoảng (1;3), nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty;1)$ ,  $(3;+\infty)$

• Hàm số đạt cực đại  $y_{CB} = 4$  tại  $x_{CB} = 3$ ; đạt cực tiểu  $y_{CT} = 0$  tại  $x_{CT} = 1$

•  $y'' = -6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2$ . Điểm uốn là  $I(2;2)$

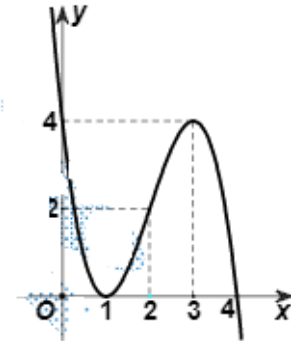
• Giao điểm với trục hoành:  $y = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 6x^2 - 9x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$

Giao điểm với trục tung:  $x = 0 \Rightarrow y = 4$

• Bảng giá trị:

$x$	0	1	2	3	4
$y$	4	0	2	4	0

• Đồ thị hàm số: nhận điểm  $I$  làm trục đối xứng như hình vẽ bên đây



**Bài 3.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số:  $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$

• Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$

• Đạo hàm:  $y' = 6x^2 + 6x$

• Cho  $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hoặc  $x = -1$

• Giới hạn:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$        $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

• Bảng biến thiên

Tuyensinh247

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$
$y$	$+$	$0$	$-$	$+$
$y$	$-\infty$	$0$	$-1$	$+\infty$

- Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$ ,  $(0; +\infty)$ , nghịch biến trên khoảng  $(-1; 0)$   
Hàm số đạt cực đại  $y_{CD} = 0$  tại  $x_{CD} = -1$ , đạt cực tiểu  $y_{CT} = -1$  tại  $x_{CT} = 0$ .

- $y'' = 12x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$ . Điểm uốn:  $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

- Giao điểm với trục hoành:

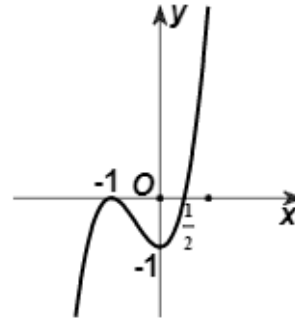
$$\text{cho } y = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = \frac{1}{2}$$

Giao điểm với trục tung: cho  $x = 0 \Rightarrow y = -1$

- Bảng giá trị:

$x$	$-\frac{3}{2}$	$-1$	$-\frac{1}{2}$	$0$	$\frac{1}{2}$
$y$	$-1$	$0$	$-\frac{1}{2}$	$-1$	$0$

- Đồ thị hàm số: như hình vẽ bên đây



**Bài 4.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số:  $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$

- Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$
- Đạo hàm:  $y' = -x^2 + 4x - 3$
- Cho  $y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 ; x = 3$
- Giới hạn:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$
- Bảng biến thiên

$x$	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$y'$	-	0	+	0	-
$y$	$+\infty$	$-\frac{4}{3}$	0	$-\infty$	

- Hàm số đồng biến trên khoảng  $(1;3)$ , nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty;1)$ ,  $(3;+\infty)$

Hàm số đạt cực đại  $y_{CD} = 0$  tại  $x_{CD} = 3$ ; đạt cực tiểu  $y_{CT} = -\frac{4}{3}$  tại  $x_{CT} = 1$

- $y'' = -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}$  Điểm uốn là  $I(2; -\frac{2}{3})$

- Giao điểm với trục hoành: cho  $y = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

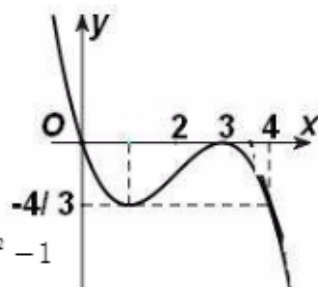
Tuyensinh247

Giao điểm với trục tung: cho  $x = 0 \Rightarrow y = -1$

• Bảng giá trị:

$x$	0	1	2	3	4
$y$	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$

• Đồ thị hàm số: như hình vẽ



**Bài 5.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số:  $y = -x^3 + 3x^2 - 1$

• Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$

• Đạo hàm:  $y' = -3x^2 + 6x$

• Cho  $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hoặc  $x = 2$

• Giới hạn:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

• Bảng biến thiên

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$y'$	-	0	+	0	-
$y$	$+\infty$	$-1$	3	$-\infty$	

• Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0;2)$ ; nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty;0)$ ,  $(2;+\infty)$

Hàm số đạt cực đại  $y_{CD} = 3$  tại  $x_{CD} = 2$

Tuyensinh247

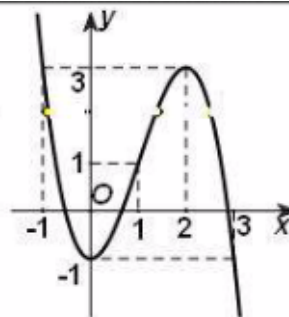
- Giao điểm với trục tung: cho  $x = 0 \Rightarrow y = -1$
- Điểm uốn:  $y'' = -6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$ .

Điểm uốn là  $I(1;1)$

- Bảng giá trị: 

$x$	-1	0	1	2	3
$y$	3	-1	1	3	-1

- Đồ thị hàm số như hình vẽ:



**Bài 6.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số:  $y = -x^3 + 3x + 1$

- Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$
- Đạo hàm:  $y' = -3x^2 + 3$
- Cho  $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$
- Giới hạn:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

- Bảng biến thiên

$x$	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$y'$	-	0	+	0
$y$	$+\infty$	↘	↗	$-\infty$

- Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1;1)$ ; nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty;-1)$ ,  $(1;+\infty)$

Tuyensinh247.com

Hàm số đạt cực đại  $y_{CD} = 3$  tại  $x_{CD} = 1$   
 đạt cực tiểu  $y_{CT} = -1$  tại  $x_{CT} = -1$

•  $y'' = -6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$ .

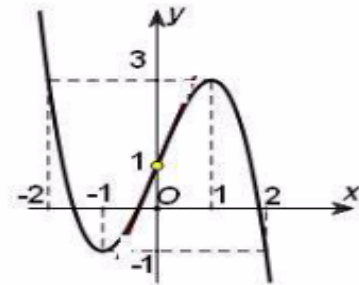
Điểm uốn là  $(0; 1)$

• Giao điểm với trục tung cho  $x = 0 \Rightarrow y = 1$

• Bảng giá trị:

$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	3	-1	1	3	-1

• Đồ thị hàm số như hình vẽ:



## Bài tập về nhà

**Ví dụ 1:** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:  $y = x^3 - 3x + 1$

**Ví dụ 2:** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x$

**Ví dụ 3:** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 - 1$

**Ví dụ 4:** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

**Ví dụ 5:** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$