40 BÀI TẬP PHƯƠNG TRINH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

1. Giải phương trình $\left(9^x-2.3^x-3\right)\log_3(x-1)+\log_{\frac{1}{3}}27=\frac{2}{3}.9^{\frac{x+1}{2}}-9^x$.

• ĐK: $x>1$ • Với ĐK trên phương trình đã cho tương đương $\left(3^{2x}-2.3^x-3\right)\log_3(x-1)-3=2.3^x-3^{2x}$
$\Leftrightarrow\left(3^x-3\right)\left(3^x+1\right)\left[\log_3(x-1)+1\right]=0$
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=1 & (l)\\ x=\frac{4}{3} & (tm)\end{array}\right.$
Vậy phương trình đã cho có một nghiệm : $x=\frac{4}{3}$.

2. Giải phương trình: $\left(\sqrt{10}+1\right)^{\log_3 x}-\left(\sqrt{10}-1\right)^{\log_3 x}=\frac{2x}{3}$.

ĐK: $x>0$ Ta có phương trình tương đương với: $\left(\sqrt{10}+1\right)^{\log_3 x}-\left(\sqrt{10}-1\right)^{\log_3 x}=\frac{2}{3}.3^{\log_3 x}$
$\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{log_3 x}-\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{log_3 x}=\frac{2}{3}$
Đặt $t=\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{log_3 x}$; t > 0 ; Phương trình trở thành: $t-\frac{1}{t}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 3t^2-2t-3=0$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{1+\sqrt{10}}{3}\ (tm)\\ t==\frac{1-\sqrt{10}}{3}\ (Loai)\end{array}\right.$
Với $t=\frac{1+\sqrt{10}}{3}$ ta giải ra được $x=3$. vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

3. Giải phương trình sau : $\log_2(4x^2+8x+4)-\log_2 x=-2x^2+4x+2$.

- Điều kiện : $x>0$.

$\log_2(4x^2+8x+4)-\log_2 x=-2x^2+4x+2 \quad (*)$

$\Leftrightarrow \log_2(4x+\frac{4}{x}+8)=4-2(1-x)^2$

- Ta có: $\frac{4}{x}+4x\ge 8 \Leftrightarrow \frac{4}{x}+4x+8\ge 16 \Leftrightarrow \log_2(\frac{4}{x}+4x+8)\ge 4$

- Vậy $\begin{cases} VT(*)\ge 4 \\ VP(*)\le 4 \end{cases}$

- Do đó: VT(*) = VP(*) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x=\frac{4}{x} \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \quad (t/m)$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 1.

4. Giải phương trình: $3^{2x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1}=2^{2x^2-6x+3}$.

$3^{2x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1}=2^{2x^2-6x+3} \Leftrightarrow 3^{2x^2-6x+2+1}+6^{x^2-3x+1}=2^{2x^2-6x+2+1}$

$\Leftrightarrow 3.9^{x^2-3x+1}+6^{x^2-3x+1}=2.4^{x^2-3x+1}$

Chia 2 vế phương trình cho 4^{x^2-3x+1} ta được: $3\left(\frac{3}{2}\right)^{2(x^2-3x+1)}+\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}-2=0$

Đặt t = $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} \quad (t>0)$.

Ta được: $3t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \quad (l) \\ t=\frac{2}{3} \end{array}\right.$

Với $t=\frac{2}{3}$, ta được : $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow$ x = 1 ∨ x = 2.

Tập nghiệm của phương trình là $S=\{2;1\}$

5. Giải phương trình: $\sqrt{1+\log_9 x}-\sqrt{3\log_9 x}=\log_3 x-1$

Điều kiện xác định: x ≥ 1

$\sqrt{1+\log_9 x}-\sqrt{3\log_9 x}=\log_3 x-1 \Leftrightarrow \sqrt{1+\log_9 x}-\sqrt{3\log_9 x}=2\log_9 x-1$

$\Leftrightarrow 1-2\log_9 x=(2\log_9 x-1)(\sqrt{1+\log_9 x}+3\sqrt{\log_9 x}) \Leftrightarrow (2\log_9 x-1)(\sqrt{1+\log_9 x}+3\sqrt{\log_9 x}+1)=0$

$\Leftrightarrow 2\log_9 x=1$ vì: $\sqrt{1+\log_9 x}+\sqrt{3\log_9 x}+1>0$

$\Leftrightarrow$ x = 3.

Vậy nghiệm phương trình đã cho là: x = 3

6. Giải bất phương trình: $\log_3(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+4)+\log_{\frac{1}{3}}(2\sqrt{x}+1)\ge\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$.

ĐK: $x\ge 0$

BPT $\Leftrightarrow \log_3(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+4)-\log_3(2\sqrt{x}+1)\ge\log_3 2$

$\Leftrightarrow \log_3(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+4)\ge\log_3 2.(2\sqrt{x}+1)$

$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+4)\ge 2.(2\sqrt{x}+1)$

* Đặt t = $\sqrt[6]{x}\ge 0$. Ta được BPT

$3t^3-t^2-2\le 0\Leftrightarrow (t-1)(3t^2+2t+2)\le 0\Leftrightarrow t\le 1$

Thay lại ta có tập nghiệm S = [0;1]

7. Giải bất phương trình : $6\log_4(2x-3)^2+2\log_2(x+1)^3\ge\log_{\sqrt{2}}(2x-1)^3$.

ĐK: $\begin{cases}2x-3\ne 0\\ x+1>0\\ 2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{1}{2}\\ x\ne\frac{3}{2}\end{cases}$

Ta có:

$6\log_4(2x-3)^2+2\log_2(x+1)^3\ge\log_{\sqrt{2}}(2x-1)^3$

$\Leftrightarrow 6\log_2|2x-3|+6\log_2(x+1)\ge 6\log_2(2x-1)$

$\Leftrightarrow |2x-3|(x+1)\ge 2x-1 \quad (1)$

TH1: $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$

$(1)\Leftrightarrow -(2x-3)(x+1)\ge 2x-1\Leftrightarrow 2x^2+x-4\le 0\Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{33}}{4}\le x\le\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$

Kết hợp với điều kiện $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}<x\le\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$

TH2: $x>\frac{3}{2}$

$(1)\Leftrightarrow (2x-3)(x+1)\ge 2x-1\Leftrightarrow 2x^2-3x-2\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x\le-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện $x>\frac{3}{2}\Rightarrow x\ge 2$

KL: Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T=\left(\frac{1}{2};\frac{-1+\sqrt{33}}{4}\right]\cup\left[2;+\infty\right)$

8. Giải phương trình $\log_2|x-2|-\log_{\frac{1}{2}}|x+5|-\log_2 8=0$.

Đkxđ: $\begin{cases}x\neq 2\\ x\neq -5\end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow \log_2|x-2|+\log_2|x+5|=\log_2 8 \Leftrightarrow \log_2\left(|x-2|.|x+5|\right)=\log_2 8 \Leftrightarrow |x-2|.|x+5|=8$

$\Leftrightarrow (x-2)^2(x+5)^2=64 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-2)(x+5)=8\\ (x-2)(x+5)=-8\end{array}\right.$

Với $(x-2)(x+5)=8 \Leftrightarrow x^2+3x-18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-6\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Với $(x-2)(x+5)=-8 \Leftrightarrow x^2+3x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\\ x=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có bốn nghiệm là $x=3$, $x=-6$, $x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

9. Giải phương trình $\log_4(x+3)-\log_2\sqrt{x-1}=2-3\log_4 2$.

Đkxđ: $x>1$

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(x+3)-\frac{1}{2}\log_2(x-1)=2-\frac{1}{2}\log_2 8$

$\Leftrightarrow \log_2(x+3)-\log_2(x-1)=4-\log_2 8 \Leftrightarrow \log_2\frac{x+3}{x-1}=\log_2 2$

$\Leftrightarrow \frac{x+3}{x-1}=2 \Leftrightarrow x+3=2x-2 \Leftrightarrow x=5$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=5$.

10. Giải phương trình: $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3)+\frac{1}{4}\log_4(x-1)^8=3\log_8(4x)$

Giải phương trình:

$\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3)+\frac{1}{4}\log_4(x-1)^8=3\log_8(4x)$. **(1)**

Điều kiện:

$$\begin{cases} x > -3 \\ x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \neq 1.$$

Khi đó

$(1) \quad \Leftrightarrow \log_2\left[(x+3)(|x-1|)\right] = \log_2(4x)$

$$\Leftrightarrow (x+3)|x-1| = 4x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+3)(x-1) = 4x \\ -(x+3)(x-1) = 4x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x^2 + 6x - 3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1(\text{loại}) \\ x = 3 \\ x = -3 + 2\sqrt{3} \\ x = -3 - 2\sqrt{3}(\text{loại}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 + 2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Tập nghiệm của phương trình

$S = \left\{3; -3 + 2\sqrt{3}\right\}$

11. Giải bất phương trình sau $(\sqrt{10}+1)^{\log_3 x} - (\sqrt{10}-1)^{\log_3 x} \geq \dfrac{2x}{3}$.

Điều kiện: $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với: $(\sqrt{10}+1)^{\log_3 x} - (\sqrt{10}-1)^{\log_3 x} \geq \dfrac{2}{3}3^{\log_3 x}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{\log_3 x} - \left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{\log_3 x} \geq \frac{2}{3} \quad (1)$$

Đặt $t = \left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{\log_3 x}$ (với $t > 0$) $\Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{\log_3 x} = \dfrac{1}{t}$

Bất phương trình (1) trở thành:

$$t - \frac{1}{t} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 3 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \frac{1+\sqrt{10}}{3} \text{ (Vì } t > 0\text{)}$$

Từ đó ta có: $\log_3 x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [3; +\infty)$

12.Giải bất phương trình $\dfrac{\log_3(x+1)^2 - \log_4(x+1)^3}{x^2 - 5x - 6} > 0$

Đk: $\begin{cases} x > -1 \\ x \neq 6 \end{cases}$

$\dfrac{\log_3(x+1)^2-\log_4(x+1)^3}{x^2-5x-6}>0 \Leftrightarrow \dfrac{2\log_3(x+1)-\dfrac{3\log_3(x+1)}{\log_3 4}}{(x+1)(x-6)}>0$
$\Leftrightarrow \dfrac{\log_3(x+1)\left(2\log_3 4-3\right)}{\left(x+1\right)\left(x-6\right)}>0$
$\Leftrightarrow \dfrac{\log_3(x+1)}{x-6}<0$ (do $\dfrac{\left(2\log_3 4-3\right)}{\left(x+1\right)}<0$) $\Leftrightarrow 0<x<6$ Kết hợp đk suy ra nghiệm của bất phương trình là: $0<x<6$

13. Giải phương trình : $2^{\log_5(x+3)}=x$

ĐK : x > 0 PT đã cho tương đương với : $\log_5(x+3)=\log_2 x$ (1) Đặt $t=\log_2 x$, suy ra $x=2^t$
pt $\Leftrightarrow \log_5\left(2^t+3\right)=t \Leftrightarrow 2^t+3=5^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^t+3\left(\dfrac{1}{5}\right)^t=1$ (2)
Xét hàm số : f(t) = $\left(\dfrac{2}{5}\right)^t+3\left(\dfrac{1}{5}\right)^t$ f'(t) = $\left(\dfrac{2}{5}\right)^t\ln\dfrac{2}{5}+3\left(\dfrac{1}{5}\right)^t\ln\dfrac{1}{5}<0, \forall t\in\mathbf{R}$ Suy ra f(t) nghịch biến trên R
Lại có : f(1) = 1 nên PT (2) có nghiệm duy nhất t = 1 hay $\log_2 x=1$ $\Leftrightarrow$ x =2 Vậy nghiệm của PT đã cho là : x = 2

14.Giải bất phương trình: $\log_3\sqrt{x^2-5x+6}+\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x-2}>\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}\left(x+3\right)$.

Điều kiện: $x>3$
Bất phương trình đã cho tương đương: $\dfrac{1}{2}\log_3\left(x^2-5x+6\right)+\dfrac{1}{2}\log_{3^{-1}}\left(x-2\right)>\dfrac{1}{2}\log_{3^{-1}}\left(x+3\right)$ $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_3\left(x^2-5x+6\right)-\dfrac{1}{2}\log_3\left(x-2\right)>-\dfrac{1}{2}\log_3\left(x+3\right)$ $\Leftrightarrow \log_3\left[\left(x-2\right)\left(x-3\right)\right]>\log_3\left(x-2\right)-\log_3\left(x+3\right)$

$\Leftrightarrow \log_3\left[(x-2)(x-3)\right] > \log_3\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)$ (Do $x>3 \Rightarrow x-2>0$).

$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) > \dfrac{x-2}{x+3}$

$\Leftrightarrow x^2-9>1(\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-\sqrt{10} \\ x>\sqrt{10} \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện, ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x>\sqrt{10}$.

15. Giải phương trình: $3^x.2x = 3^x + 2x + 1$.

Ta có: $3^x.2x = 3^x + 2x + 1 \;\; \Leftrightarrow 3^x(2x-1) = 2x+1$ (1)

-Nhận xét: x = $\dfrac{1}{2}$ không là nghiệm của phương trình.

-Với $x \neq \dfrac{1}{2}$ thì: (1) $\Leftrightarrow 3^x = \dfrac{2x+1}{2x-1}$ (2). Đặt: $f(x)=3^x; g(x)=\dfrac{2x+1}{2x-1}$

+)Xét trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$, ta có:

$f'(x)=3^x\ln 3>0 \Rightarrow f(x)$ là hàm luôn đồng biến trên $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

$g'(x)=\dfrac{-4}{(2x-1)^2}<0 \Rightarrow g(x)$ là hàm luôn nghịch biến trên $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

Suy ra phương trình (2) có nghiệm duy nhất trên $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.Ta thấy: $x=-1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1) trên $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

+)Xét trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$, ta có:

$f'(x)=3^x\ln 3>0 \Rightarrow f(x)$ là hàm luôn đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

$g'(x)=\dfrac{-4}{(2x-1)^2}<0,\ \forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right) \Rightarrow g(x)$ là hàm luôn nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Suy ra phương trình (2) có nghiệm duy nhất trên $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. Ta thấy: $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1) trên $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm $x=\pm 1$.

16.Giải phương trình: $(x-1)\log_7 3 + \log_7(3^{x+1}+3) = \log_7(11.3^x-9)$

Điều kiện: $\begin{cases} 3^{x+1}+3>0 \\ 11.3^x-9>0 \end{cases} \Leftrightarrow 3^x>\dfrac{9}{11} \Leftrightarrow x>\log_3\dfrac{9}{11}$

Khi đó phương trình tương đương với:

$\log_7 3^{x-1}+\log_7(3^{x+1}+3)=\log_7(11.3^x-9)$

$\Leftrightarrow 3^{x-1}(3^{x+1}+3)=11.3^x-9$

$\Leftrightarrow 3^{2x}-10.3^x+9=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x=1 \\ 3^x=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Kết luận : Nghiệm phương trình là : x = 0; x = 2.

17. Giải bất phương trình sau $\log_4(2+x)+\log_{\frac{1}{2}}(4-\sqrt[4]{18-x})\le 0.$

$*\log_4(2+x)+\log_{\frac{1}{2}}(4-\sqrt[4]{18-x})\le 0.$

Điều kiện: $\begin{cases} 2+x>0,\ 18-x\ge 0 \\ 4-\sqrt[4]{18-x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow -2<x\le 18.$

Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$\log_2\sqrt{2+x}\le\log_2(4-\sqrt[4]{18-x}) \Leftrightarrow \sqrt{2+x}\le 4-\sqrt[4]{18-x}$.

Đặt $t=\sqrt[4]{18-x}$. Khi đó $0\le t<\sqrt[4]{20}$ và bất phương trình trở thành : $\sqrt{20-t^4}\le 4-t$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-t\ge 0 \\ 20-t^4\le(4-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\le 4 \\ t^4+t^2-8t-4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\le 4 \\ (t-2)(t^3+2t^2+5t+2)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\le 4 \\ t-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\le t\le 4.$

Suy ra $\sqrt[4]{18-x}\ge 2 \Leftrightarrow x\le 2.$

Kết hợp với điều kiện, ta có nghiệm của bất phương trình là $-2<x\le 2.$

18.Giải phương trình: $\left(3+\sqrt{7}\right)^{x^2+2x}+\left(3-\sqrt{7}\right)^{x^2+2x}=2^{\frac{x^2+2x}{2}+4}$.

Chia hai vế cho $\left(\sqrt{2}\right)^{x^2+2x}$ ta được $\left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^{x^2+2x}+\left(\dfrac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^{x^2+2x}=2^4$

Đặt $t=\left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^{x^2+2x}$ $(t>0)$ ta được $t^2-16t+1=0$

Giải ra $\left[\begin{array}{l} t=8+\sqrt{63}=\left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ t=8-\sqrt{63}=\left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^{-2} \end{array}\right.$	
Suy ra $\left[\begin{array}{l} x^2+2x=2 \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{3}. \\ x^2+2x=-2 \text{ (VN)} \end{array}\right.$	

19.Giải phương trình: $2\log_3\left(x^2-4\right)+3\sqrt{\log_3\left(x+2\right)^2}-\log_3\left(x-2\right)^2=4$.

ĐKXĐ: $\begin{cases} x^2-4>0 \\ \left(x+2\right)^2>0 \\ \log_3\left(x+2\right)^2\ge 0 \\ \left(x-2\right)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-3\right]\cup\left(2;+\infty\right)$ (*)
Biến đổi pt đã cho ta được: $\log_3\dfrac{\left(x^2-4\right)^2}{\left(x-2\right)^2}+3\sqrt{\log_3\left(x+2\right)^2}-4=0 \Leftrightarrow \log_3\left(x+2\right)^2+3\sqrt{\log_3\left(x+2\right)^2}-4=0$ (3)
Đặt $t=\log_3\left(x+2\right)^2$ $\left(t\ge 0\right)$ thì pt (3) trở thành $t^2+3t-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-4\left(Loai\right) \end{array}\right.$ $t=1 \Leftrightarrow \log_3\left(x+2\right)^2=1 \Leftrightarrow \left(x+2\right)^2=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2+\sqrt{3}\ \ (loai) \\ x=-2-\sqrt{3} \end{array}\right.$
Vậy nghiệm của phương trình là $x=-2-\sqrt{3}$.

20. Giải phương trình: $12+6^x=4.3^x+3.2^x$

pt $\Leftrightarrow 4\left(3^x-3\right)+2^x\left(3-3^x\right)=0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x-3=0 \\ 4-2^x=0 \end{array}\right.$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$
Vậy PT có hai nghiệm $x=1, x=2$

21. Giải bất phương trình : $5.36^x-2.81^x-3.16^x\le 0$

Chia cả 2 vế của bất phương trình cho 81^x ta được bất phương trình tương đương:

$$5\left(\frac{36}{81}\right)^x - 2 - 3\left(\frac{16}{81}\right)^x \le 0$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{4}{9}\right)^x - 3\left(\frac{4}{9}\right)^{2x} - 2 \le 0$$

Đặt $t = \left(\frac{4}{9}\right)^x$, đk $t > 0$

Bất phương trình trở thành: $3t^2-5t+2 \ge 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le \frac{2}{3} \\ t \ge 1 \end{array}\right.$$ Kết hợp với đk ta được: $$\left[\begin{array}{l} 0 < t \le \frac{2}{3} \\ t \ge 1 \end{array}\right.$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{4}{9}\right)^x \le \frac{2}{3} \\ \left(\frac{4}{9}\right)^x \ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \frac{1}{2} \\ x \le 0 \end{array}\right.$

22. Giải bất phương trình : $\log_2^3 x - 2\log_2 x.\log_2 4x - \log_{\frac{1}{2}} x + 6 > 0$

ĐK: x>0

$$\log_2^3 x - 2\log_2 x.\log_2 4x - \log_{\frac{1}{2}} x + 6 > 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2^3 x - 2\log_2 x(\log_2 x + 2) + \log_2 x + 6 > 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x(\log_2 x - 2) - 3(\log_2 x - 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x - 2)(\log_2^2 x - 3) > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{3} < \log_2 x < \sqrt{3} \\ \log_2 x > 2 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ 2^{-\sqrt{3}} < x < 2^{\sqrt{3}} \end{array}\right.$ Kết hợp với đk ta được nghiệm của bpt là: $\left[\begin{array}{l} x > 4 \\ 2^{-\sqrt{3}} < x < 2^{\sqrt{3}} \end{array}\right.$

23.Giải phương trình $\log_8(3+x) = \log_{27}(1-2x)$

$\log_8(3+x) = \log_{27}(1-2x)$

Điều kiện $-3 < x < \frac{1}{2}$

Đặt $t=\log_8(3+x)=\log_{27}(1-2x),(*)$ $\Rightarrow\begin{cases}3+x=8^t\\1-2x=27^t\end{cases}\Rightarrow 2.8^t+27^t=7\qquad(1)$
Xét hàm số $f(t)=2.8^t+27^t$ Với $f'(t)=2.8^t\ln 8+27^t\ln 27>0,\forall t\in\mathbb{R}$ Nên $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$phương trình (1) có nghiệm duy nhất Mặt khác: $f(\frac{1}{3})=7=f(t)\Rightarrow t=\frac{1}{3}$
Thay $t=\frac{1}{3}$ vào (*) ta được $x=-1$ thoả mãn điều kiện. Vậy, $x=-1$ là nghiệm của phương trình.

24.Giải bất phương trình $\log_2\left(\sqrt{3x+1}+6\right)-1\ge\log_2\left(7-\sqrt{10-x}\right)$

ĐK : $-\frac{1}{3}\le x\le 10$
Bất phương trình tương đương : $\log_2\frac{6+\sqrt{3x+1}}{7-\sqrt{10-x}}\ge 1$
$\frac{6+\sqrt{3x+1}}{7-\sqrt{10-x}}\ge 2\Leftrightarrow\sqrt{3x+1}+2\sqrt{10-x}\ge 8\Leftrightarrow 4\sqrt{(3x+1)(10-x)}\ge 23+x$
Với $-\frac{1}{3}\le x\le 10$ bất phương trình tương đương với $49x^2-418x+369\le 0\Leftrightarrow 1\le x\le\frac{369}{49}$ Kết hợp với điều kiện nghiệm là $1\le x\le\frac{369}{49}$

25.Giải bất phương trình: $\log_4(x+1)^2+2\ge\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(x+4)^3$

$\log_4(x+1)^2+2\ge\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(x+4)^3$ (1) Đk: $\begin{cases}-4<x<4\\x\ne -1\end{cases}$
$(1)\Leftrightarrow\log_2\lvert x+1\rvert+2\ge\log_2(4-x)+\log_2(x+4)$ $\Leftrightarrow 4\lvert x+1\rvert\ge 16-x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4(x+1)\ge 16-x^2\\4(x+1)\le x^2-16\end{array}\right.$
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+4x-12\ge 0\\x^2-4x-20\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\x\le -6\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x\ge 2+2\sqrt{6}\\x\le 2-2\sqrt{6}\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\x\le 2-2\sqrt{6}\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện suy ra nghiệm của (1) là $\left[\begin{array}{l}2\le x<4\\ -4<x\le 2-2\sqrt{6}\end{array}\right.$.

26. Giải phương trình: $\log_2(x^2-3x+2)+\log_2(x^2+5x+6)=2+\log_2 3$

Điều kiện: $\begin{cases}x^2-3x+2>0\\ x^2+5x+6>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\ x<-3\end{array}\right.$

$\log_2(x^2-3x+2)+\log_2(x^2+5x+6)=2+\log_2 3$

$\Leftrightarrow \log_2\left[(x^2-3x+2)(x^2+5x+6)\right]=\log_2 12$

$\Leftrightarrow (x^2-3x+2)(x^2+5x+6)=12$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+2)(x+3)=12$

$\Leftrightarrow (x^2+x-6)(x^2+x-2)=12$

Đặt $t=x^2+x-4$ phương trình (*) trở thành $(t-2)(t+2)=12$

$\Leftrightarrow t^2-4=12\Leftrightarrow t^2=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\ t=-4\end{array}\right.$

Với $t=4$ thì $x^2+x-4=4\Leftrightarrow x^2+x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{2}(t/m)\\ x=\dfrac{-1-\sqrt{33}}{2}(t/m)\end{array}\right.$

Với $t=-4$ thì $x^2+x-4=-4\Leftrightarrow x^2+x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0(t/m)\\ x=-1(t/m)\end{array}\right.$

Kêt luận :

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm $x=0,x=-1,x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{2},x=\dfrac{-1-\sqrt{33}}{2}$

27. Tìm các giá trị của m để bất phương trình sau có nghiệm đúng với mọi $x\ge 0$

$81^{\sqrt[4]{x}}+2m.9^{\sqrt[4]{x}}.3^{\sqrt{x}}+(2m+3).9^{\sqrt{x}}\le 0$

Điều kiện: $x\ge 0$ .Chia cả 2 vế cho $3^{2\sqrt{x}}$ ta được: $3^{2(2\sqrt[4]{x}-\sqrt{x})}+2m.3^{2\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}+2m+3\le 0$

Đặt $t=3^{2\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}$ ĐK: $0<t\le 3$

Bài toán tương đương là tìm m để: $m\le\dfrac{-t^2-3}{2(t+1)}$ với mọi t, $0<t\le 3$

Xét hàm số: $y=\frac{-t^2-3}{2(t+1)}$ với $0<t\le 3,\ y'=\frac{-2t^2-4t+6}{4(t+1)^2}$, y'=0 $\Rightarrow$ t=1, t=-3
Từ bảng biến thiên ta được $m\le -\frac{3}{2}$

28.Giải phương trình $\log_x 2+\log_{2x}4=\log_{\sqrt{2x}}8$

Điều kiện: $\begin{cases}0<x\ne 1\\ 0<2x\ne 1\\ 0<\sqrt{2x}\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\ne 1\\ x\ne \frac{1}{2}\end{cases}$ (*)
Với điều kiện (*) phương trình tương đương với $\frac{\log_2 2}{\log_2 x}+\frac{\log_2 4}{\log_2 2x}=\frac{\log_2 8}{\log_2\sqrt{2x}}\Leftrightarrow\frac{1}{\log_2 x}+\frac{2}{1+\log_2 x}=\frac{3}{\frac{1}{2}(1+\log_2 x)}$
$\Leftrightarrow\frac{1}{\log_2 x}+\frac{2}{1+\log_2 x}=\frac{6}{1+\log_2 x}\Leftrightarrow\frac{1}{\log_2 x}=\frac{4}{1+\log_2 x}\Leftrightarrow 1+\log_2 x=4\log_2 x$ $\Leftrightarrow 3\log_2 x=1\Leftrightarrow\log_2 x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=2^{\frac{1}{3}}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}$ (thỏa mãn)
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\sqrt[3]{2}$

29.Giải phương trình: $\left(3-\sqrt{5}\right)^{x^2}+5\left(3+\sqrt{5}\right)^{x^2}=3.2^{x^2+1}$

$\left(3-\sqrt{5}\right)^{x^2}+5\left(3+\sqrt{5}\right)^{x^2}=3.2^{x^2+1}\Leftrightarrow\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}+5\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}=6;\ \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=1$ Đặt $t=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}>0.Pt\Rightarrow t+\frac{5}{t}=6$
$t^2-6t+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=5\end{array}\right.$
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}=1\\ \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=\log_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}5\end{array}\right.\Leftrightarrow x=0$

30.Giải bất phương trình: $\sqrt{\log_2^2 x-\log_2 x^2-3}>\sqrt{5}(\log_4 x^2-3)$

ĐK: $\begin{cases} x>0 \\ \log_2^2 x-\log_2 x^2-3\ge 0 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\log_2^2 x-\log_2 x^2-3}>\sqrt{5}(\log_2 x-3)$ (1)

Đặt $t=\log_2 x$,

BPT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{t^2-2t-3}>\sqrt{5}(t-3)\Leftrightarrow \sqrt{(t-3)(t+1)}>\sqrt{5}(t-3)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (t+1)(t-3)\ge 0 \\ t-3<0 \end{cases} \\ \begin{cases} t\ge 3 \\ (t+1)(t-3)>5(t-3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le -1 \\ \begin{cases} t\ge 3 \\ (t+1)(t-3)>5(t-3)^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le -1 \\ 3<t<4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x\le -1 \\ 3<\log_2 x<4 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x\le \frac{1}{2} \\ 8<x<16 \end{array}\right.$ Vậy BPT đã cho có tập nghiệm là: $\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup(8;16)$

31.Giải bất phương trình sau $x-6.15^{\log_3\sqrt{x}}+5^{\log_3(3x)}\ge 0$

ĐK $x>0$

Ta có: $x-6.15^{\log_3\sqrt{x}}+5^{\log_3(3x)}\ge 0 \Leftrightarrow 3^{\log_3 x}-6.15^{\frac{1}{2}\log_3 x}+5.5^{\log_3 x}\ge 0$

$\Leftrightarrow 3^{\log_3 x}-6\left(\sqrt{3}.\sqrt{5}\right)^{\log_3 x}+5.5^{\log_3 x}\ge 0$ (1)

Chia cả hai vế của (1) cho $5^{\log_3 x}$ ta được BPT sau: $\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{\log_3 x}-6\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^{\log_3 x}+5\ge 0$ (2)

Đặt $t=\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^{\log_3 x}$, $t>0$. Khi đó (2) $\Leftrightarrow t^2-6t+5\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le 1 \\ t\ge 5 \end{array}\right.$

Với $t\le 1\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^{\log_3 x}\le 1\Leftrightarrow \log_3 x\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$

Với $t\ge 5\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^{\log_3 x}\ge 5\Leftrightarrow \log_3 x\le \log_{\sqrt{\frac{3}{5}}} 5\Leftrightarrow x\le 9^{\log_{\frac{3}{5}} 5}$

Vậy nghiệm BPT là $x\in\left(0;9^{\log_{\frac{3}{5}} 5}\right]\cup[1;+\infty)$

32.Giải bất phương trình sau $\log_2(\log_4 x) \ge \log_4(\log_2 x)$.

+ Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x > 0 \Leftrightarrow x > 1. \\ \log_4 x > 0 \end{cases}$
+ Ta có $$\log_2(\log_4 x) \ge \log_4(\log_2 x)$$ $$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right) \ge \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x)$$ $$\Leftrightarrow \log_2(\log_2 x) - 1 \ge \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x)$$
$$\Leftrightarrow \log_2(\log_2 x) \ge 2 \Leftrightarrow \log_2 x \ge 4.$$
$$x \ge 16.$$ + Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [16; +\infty)$.

33.Giải bất phương trình: $\log_2(x^2 - x - 2) \ge \log_{0,5}(x-1) + 1$.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 2 \\ x > 1 \end{cases}$
$\log_2(x^2 - x - 2) \ge \log_{0,5}(x-1) + 1 \Leftrightarrow \log_2(x^2 - x - 2) \ge -\log_2(x-1) + 1$ $\Leftrightarrow \log_2\left((x^2 - x - 2)(x-1)\right) \ge 1$
$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(x-1) \ge 2 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 1) \ge 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \ge 0$ (Vì theo điều kiện $x > 2$)
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 1 + \sqrt{2} \\ x \le 1 - \sqrt{2} \end{array}\right.$ Kết hợp điều kiện ta được $x \ge 1 + \sqrt{2}$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[1 + \sqrt{2}; +\infty\right)$

34.Giải phương trình: $log_4\left(\dfrac{x^2 + x + 2}{2x^2 + 4x + 4}\right) = 2x^2 + 6x + 4$.

Có : $\dfrac{x^2 + x + 2}{2x^2 + 4x + 4} > 0, \forall x \in R.$ PT $\Leftrightarrow log_4(x^2 + x + 2) - log_4(2x^2 + 4x + 4) = 2(2x^2 + 4x + 4) - 2(x^2 + x + 2)$
$\Leftrightarrow log_4(x^2 + x + 2) + 2(x^2 + x + 2) = log_4(2x^2 + 4x + 4) + 2(2x^2 + 4x + 4)$

Xét hàm $f(t)=log_4 t+2t$ trên $(0;+\infty)$; $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 4}+2>0,\forall t>0$.

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

PT trở thành $f(2x^2+4x+4)=f(x^2+x+2)$ và $2x^2+4x+4>0;x^2+x+2>0$

$\Leftrightarrow 2x^2+4x+4=x^2+x+2 \Leftrightarrow x=-1;x=-2$.

Vậy phương trình có hai nghiệm : $x=-1;x=-2$.

35.Giải phương trình: $log_2\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right)=log_4(5x+10)$.

Điều kiện: $\begin{cases}2x+1\ge 0\\ x+1\ge 0\\ 5x+10>0\end{cases} \Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{2}$

(1) $\Leftrightarrow \log_2\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right)=\dfrac{1}{2}\log_2(5x+10)$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right)^2=5x+10 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+3x+1}=x+4$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+4\ge 0\\ 2x^2+3x+1=x^2+8x+16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -4\\ x^2-5x-15=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -4\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5+\sqrt{85}}{2}(tm)\\ x=\dfrac{5-\sqrt{85}}{2}(loai)\end{array}\right.\end{cases}$. ***Vậy phương trình có nghiệm*** $x=\dfrac{5+\sqrt{85}}{2}$

36.Giải phương trình : $\sqrt{2\left(5^x+24\right)}-\sqrt{5^x-7}+5^{2\left(5^x+24\right)}=\sqrt{5^x+7}+25^{\left(5^x+\sqrt{25^x-49}\right)}$

Giải phương trình : $\sqrt{2\left(5^x+24\right)}-\sqrt{5^x-7}+5^{2\left(5^x+24\right)}=\sqrt{5^x+7}+25^{\left(5^x+\sqrt{25^x-49}\right)}$

Điều kiện: $x\ge \log_5 7$

$PT \Leftrightarrow 5^{2\left(5^x+24\right)}+\sqrt{2\left(5^x+24\right)}=5^{2.5^x+2\sqrt{5^x+7}.\sqrt{5^x-7}}+\sqrt{5^x+7}+\sqrt{5^x-7}$

$\Leftrightarrow 5^{2\left(5^x+24\right)}+\sqrt{2\left(5^x+24\right)}=5^{\left(\sqrt{5^x+7}+\sqrt{5^x-7}\right)^2}+\left(\sqrt{5^x+7}+\sqrt{5^x-7}\right)$ (*)

Xét hàm số $f(t)=5^{t^2}+t$ trên $(0;+\infty)$

$\Rightarrow f'(t)=2t.5^{t^2}.\ln 5+1>0$ với $\forall t\in(0;+\infty)$

suy ra hàm số $f(t)=5^{t^2}+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Phương trình $(*) \Leftrightarrow 2.5^x + 48 = 2.5^x + 2\sqrt{5^{2x} - 49}$
$\Leftrightarrow \sqrt{5^{2x} - 49} = 24 \Leftrightarrow 25^x = 625 \Leftrightarrow x = 2$ Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x = 2$

37.Giải phương trình $\log_{3+x} 6 + \dfrac{2\log_{\frac{1}{4}}(4-x)}{\log_2(3+x)} = 1$

$\log_{3+x} 6 + \dfrac{2\log_{\frac{1}{4}}(4-x)}{\log_2(3+x)} = 1$ Điều kiện: $\begin{cases} -3 < x < 4 \\ x \neq -2 \end{cases}$ Phương trình $\Leftrightarrow \log_{3+x} 6.\log_2(3+x) - \log_2(4-x) = \log_2(3+x)$
$\Leftrightarrow \log_2 6 = \log_2(4-x) + \log_2(3+x)$ $\Leftrightarrow \log_2 6 = \log_2(4-x)(3+x)$
$\Leftrightarrow 6 = (4-x)(3+x) \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2(l) \\ x = 3(tm) \end{array}\right.$ vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 3

38. Giải phương trình: $x^2 2^x + 6x + 12 = 6x^2 + x2^x + 2^{x+1}$

$x^2 2^x + 6x + 12 = 6x^2 + x2^x + 2^{x+1} \Leftrightarrow (2^x - 6)(x^2 - x - 2) = 0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 6 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{array}\right.$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_2 6 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$
Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm: $T = \{\log_2 6; -1; 2\}$

39.Giải phương trình : $\sqrt{2(5^x + 24)} - \sqrt{5^x - 7} + 5^{2(5^x + 24)} = \sqrt{5^x + 7} + 25^{\left(5^x + \sqrt{25^x - 49}\right)}$

Giải phương trình : $\sqrt{2(5^x + 24)} - \sqrt{5^x - 7} + 5^{2(5^x + 24)} = \sqrt{5^x + 7} + 25^{\left(5^x + \sqrt{25^x - 49}\right)}$
Điều kiện: $x \geq \log_5 7$

$$PT \Leftrightarrow 5^{2\left(5^x+24\right)} + \sqrt{2\left(5^x+24\right)} = 5^{2.5^x + 2\sqrt{5^x+7}.\sqrt{5^x-7}} + \sqrt{5^x+7} + \sqrt{5^x-7}$$

$$\Leftrightarrow 5^{2\left(5^x+24\right)} + \sqrt{2\left(5^x+24\right)} = 5^{\left(\sqrt{5^x+7}+\sqrt{5^x-7}\right)^2} + \left(\sqrt{5^x+7}+\sqrt{5^x-7}\right) \ (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 5^{t^2} + t$ trên $(0;+\infty)$

$\Rightarrow f'(t) = 2t.5^{t^2}.\ln 5 + 1 > 0$ với $\forall t \in (0;+\infty)$

suy ra hàm số $f(t) = 5^{t^2} + t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Phương trình $(*) \Leftrightarrow 2.5^x + 48 = 2.5^x + 2\sqrt{5^{2x} - 49}$

$\Leftrightarrow \sqrt{5^{2x} - 49} = 24 \Leftrightarrow 25^x = 625 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x = 2$

40.Giải phương trình $\log_{3+x} 6 + \dfrac{2\log_{\frac{1}{4}}(4-x)}{\log_2(3+x)} = 1$

$$\log_{3+x} 6 + \frac{2\log_{\frac{1}{4}}(4-x)}{\log_2(3+x)} = 1$$

Điều kiện: $\begin{cases} -3 < x < 4 \\ x \neq -2 \end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow \log_{3+x} 6.\log_2(3+x) - \log_2(4-x) = \log_2(3+x)$

$\Leftrightarrow \log_2 6 = \log_2(4-x) + \log_2(3+x)$

$\Leftrightarrow \log_2 6 = \log_2(4-x)(3+x)$

$\Leftrightarrow 6 = (4-x)(3+x) \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 (l) \\ x = 3 (tm) \end{array}\right.$ vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 3