

Câu 1 (2,0 điểm) Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp điểm có hoành độ $x = 1$

Câu 2 (1,0 điểm)

- Cho góc α thoả mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Tính $A = \frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$
- Cho số phức z thoả mãn hệ thức $(1+i)z + (3-i)\bar{z} = 2 - 6i$. Tính modun của z .

Câu 3 (0,5 điểm) Giải phương trình: $\log_3(x+2) = 1 - \log_3x$

Câu 4 (1,0 điểm) Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x-2} \geq \sqrt{3(x^2-2x-2)}$

Câu 5 (1,0 điểm) Tính tích phân $I = \int_1^2 (2x^3 + \ln x) dx$

Câu 6 (1,0 điểm) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AC = 2a$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt đáy là trung điểm của cạnh AC và $SH = \sqrt{2}a$. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).

Câu 7 (1,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác OAB có các đỉnh A và B thuộc đường thẳng $\Delta: 4x + 3y - 12 = 0$ và điểm K (6;6) là tâm đường tròn bàng tiếp góc O. Gọi C là điểm nằm trên Δ sao cho $AC = AO$ và các điểm C, B nằm khác phía so với điểm A. Biết điểm C có hoành độ bằng $\frac{24}{5}$, tìm tọa độ các đỉnh A, B.

Câu 8 (1,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(2;0;0) và B(1;1;-1). Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB và phương trình mặt cầu tâm O, tiếp xúc với (P).

Câu 9 (0,5 điểm) Hai thí sinh A và B tham gia một buổi thi vấn đáp. Cán bộ hỏi thi đưa cho mỗi thí sinh một bộ câu hỏi thi gồm 10 câu hỏi khác nhau, được đựng trong 10 phong bì dán kín, có hình thức giống hệt nhau, mỗi phong bì đựng 1 câu hỏi; thí sinh chọn 3 phong bì trong số đó để xác định câu hỏi thi của mình. Biết rằng bộ 10 câu hỏi thi dành cho các thí sinh là như nhau, tính xác suất để 3 câu hỏi A chọn và 3 câu hỏi B chọn là giống nhau.

Câu 10 (1,0 điểm) Xét số thực x . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{3(2x^2+2x+1)}}{3} + \frac{1}{\sqrt{2x^2+(3-\sqrt{3})x+3}} + \frac{1}{\sqrt{2x^2+(3+\sqrt{3})x+3}}$$

HẾT

ĐÁP ÁN

Câu 1:

a. (1,0 điểm)

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

+ Giới hạn và tiệm cận

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2 \quad 0,25$$

Suy ra đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$ và một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$

+ Sự biến thiên:

$$\text{- Chiều biến thiên } y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$$

Suy ra hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$ 0,25

- Cực trị: Hàm số đã cho không có cực trị

+ Bảng biến thiên: 0,25

| | | | |
|------|-----------|--|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | $+\infty$ |
| y' | + | | + |
| y | 2 | $\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$ | 2 |

+ Đồ thị: 0,25

b. (1,0 điểm)

$$\text{Tung độ } y_0 \text{ của tiếp điểm là } y_0 = y(1) = \frac{1}{2} \quad 0,25$$

$$\text{Suy ra hệ số góc } k \text{ của tiếp tuyến là } k = y'(1) = \frac{3}{4} \quad 0,25$$

$$\text{Do đó phương trình của tiếp tuyến là } y = \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{2} \quad 0,25$$

$$\text{Hay } y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \quad 0,25$$

Câu 2

a. (0,5 điểm)

$$\text{Ta có } A = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \tan \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{3}{5} \cos \alpha \quad (1) \quad 0,25$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \quad (2)$$

Vì $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ nên $\cos \alpha < 0$. Do đó từ (2) suy ra $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ (3) 0,25

Thế (3) vào (1) ta được $A = -\frac{12}{25}$

b. (0,5 điểm)

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in R$), khi đó $\bar{z} = a - bi$. Do đó kí hiệu (*) là hệ thức cho trong đề bài ta

$$\text{có: (*)} \Leftrightarrow (1 + i)(a + bi) + (3 - i)(a - bi) = 2 - 6i \quad 0,25$$

$$\Leftrightarrow (4a - 2b - 2) + (6 - 2b)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b - 2 = 0 \\ 6 - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \quad 0,25$$

$$\text{Do đó } |z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Câu 3 (0,5 điểm)

+ ĐK: $x > 0$ (1)

+ Với điều kiện đó, ký hiệu (2) là phương trình đã cho ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \log_3(x + 2) + \log_3 x = 1 \Leftrightarrow \log_3(x(x + 2)) = \log_3 3 \quad 0,25$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (do } x > 0) \quad 0,25$$

Câu 4 (1,0 điểm)

+ ĐK: $x \geq 1 + \sqrt{3}$ (1)

Với Đk đó, ký hiệu (2) là bất phương trình đã cho ta có:

$$(2) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 + 2\sqrt{x(x + 1)(x - 2)} \geq 3(x^2 - 2x - 2) \quad 0,25$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x(x + 1)(x - 2)} \geq x(x - 2) - 2(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x(x - 2)} - 2\sqrt{(x + 1)}) (\sqrt{x(x - 2)} + \sqrt{(x + 1)}) \leq 0 \quad (3) \quad 0,50$$

Do với mọi x thỏa mãn (1) ta có $\sqrt{x(x - 2)} + \sqrt{(x + 1)} > 0$ nên

$$(3) \Leftrightarrow \sqrt{x(x - 2)} \leq 2\sqrt{(x + 1)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{13} \leq x \leq 3 + \sqrt{13} \quad (4)$$

Kết hợp (1) và (4) ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$[1 + \sqrt{3}; 3 + \sqrt{13}] \quad 0,25$$

Câu 5 (1,0 điểm)

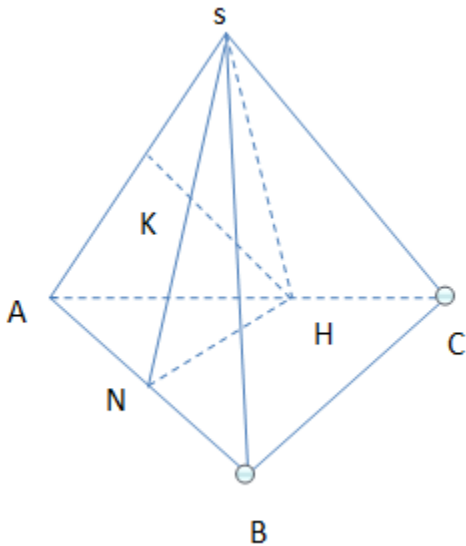
$$\text{Ta có } I = \int_1^2 2x^3 dx + \int_1^2 \ln x dx \quad (1) \quad 0,25$$

Đặt $I_1 = \int_1^2 2x^3 dx$ và $I_2 = \int_1^2 \ln x dx$. Ta có $I_1 = \frac{1}{2} x^4 \Big|_1^2 = \frac{15}{2}$ 0,25

$I_2 = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 x d(\ln x) = 2 \ln 2 - \int_1^2 dx = 2 \ln 2 - x \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1$ 0,5

Vậy $I = I_1 + I_2 = \frac{13}{2} + 2 \ln 2$

Câu 6 (1,0 điểm)



Hình

Theo giả thiết $HA = HC = \frac{1}{2} AC = a$ và $SH \perp mp(ABC)$

Xét $\Delta v. ABC$ ta có $BC = AC \cdot \cos \widehat{ACB} = 2a \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3}a$ 0,25

Do đó $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \sqrt{3}a \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$ 0,25

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}$

Vì $CA = 2 HA$ nên $d(C, (SAB)) = 2d(H, (SAB))$ (1)

Gọi N là trung điểm của AB, ta có HN là đường trung bình của tam giác ABC

Do đó $HN \parallel BC$. Suy ra $AB \perp HN$. Lại có $AB \perp SH$ nên $AB \perp mp(SHN)$. Do đó $mp(SAB) \perp mp(SHN)$. Mà SN là giao tuyến của hai mặt phẳng vừa nêu nên HK \perp SN ta có $HK \perp mp(SAB)$ 0,25

Vì vậy $d(H, (SAB)) = HK$. Kết hợp với (1) suy ra $d(C, (SAB)) = 2 HK$ (2)

Vì $SH \perp mp(ABC)$ nên $SH \perp HN$. Xét $\Delta v. SHN$ ta có

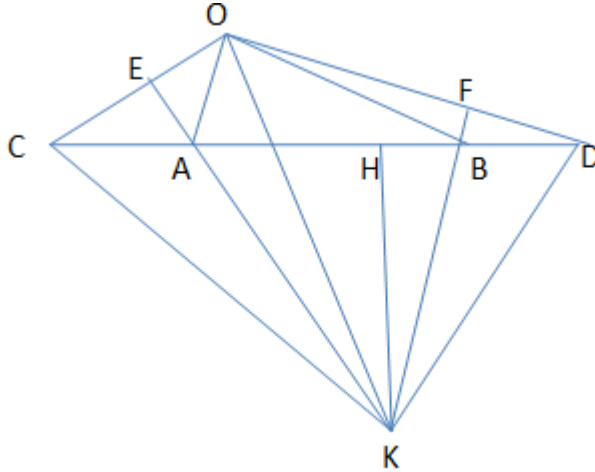
$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HN^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{HN^2}$$

Vì HN là đường trung bình của tam giác ABC nên $HN = \frac{1}{2} BC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Do đó $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{11}{6a^2}$ Suy ra $HK = \frac{a\sqrt{66}}{11}$ (3) 0,25

Thế (3) vào (2) ta được $d(C, (SAB)) = \frac{2a\sqrt{66}}{11}$

Câu 7 (1,0 điểm)



Trên Δ lấy điểm D sao cho $BD = BO$ và D, A nằm khác phía nhau so với B

Gọi E là giao điểm của các đường thẳng KA và OC;

Gọi F là Giao điểm của các đường thẳng KB và OD

Vì K là tâm đường tròn bàng tiếp góc O của tam giác OAB nên KE là phân giác của góc OAC.

Mà OAC là tam giác cân tại A (do $AO = AC$, theo giả thiết) nên suy ra KE cũng là đường trung trực của OC. Do đó E là trung điểm của OC và $KC = KO$.

Xét tương tự đối với KF, ta có F là trung điểm của OD và $KD = KO$ 0,5

Suy ra tam giác CKD cân tại K. Do đó hạ $HK \perp \Delta$, ta có H là trung điểm của CD

Như vậy:

+ A là giao của Δ và đường trung trực d_1 của đoạn thẳng OC (1)

+ B là giao của Δ và đường trung trực d_2 của đoạn thẳng OD, với D là điểm đối xứng của C qua H và H là hình chiếu vuông góc của K trên Δ (2)

Vì $C \in \Delta$ và hoành độ $x_0 = \frac{24}{5}$ (gt) nên gọi y_0 là tung độ của C, ta có

$$4. \frac{24}{5} + 3y_0 - 12 = 0. \text{ Suy ra } y_0 = -\frac{12}{5}$$

Từ đó trung điểm E của OC có tọa độ là $(\frac{12}{5}; -\frac{6}{5})$ và đường thẳng OC có phương trình $x + 2y = 0$

0,25

Suy ra pt của d_1 là $2x - y - 6 = 0$

Do đó theo (1) tọa độ của A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 12 = 0 \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $A = (3;0)$

Gọi d là đường thẳng đi qua $K(6;6)$ và vuông góc với Δ ta có pt của d là $3x - 4y + 6 = 0$. Từ đây, do H là giao điểm của Δ và d nên tọa độ của H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 12 = 0 \\ 3x - 4y + 6 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $H = (\frac{6}{5}; \frac{12}{5})$ Suy ra $D = (-\frac{12}{5}; \frac{36}{5})$

Do đó trung điểm F của OD có tọa độ là $(-\frac{6}{5}; \frac{18}{5})$ và đường thẳng OD có phương trình $3x + y = 0$
0,25

Suy ra phương trình của d_2 là $x - 3y + 12 = 0$

Do đó theo (2) tọa độ của B là nghiệm của hệ pt:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 12 = 0 \\ x - 3y + 12 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $B = (0;4)$

Câu 8 (1,0 điểm)

Gọi M là trung điểm của AB ta có $M(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$

Vì (P) là mặt phẳng trung trực của AB nên (P) đi qua M và $\vec{AB} = (-1;1;-1)$ là một véc tơ pháp tuyến của (P) 0,25

Suy ra phương trình của (P) là $(-1)(x - \frac{3}{2}) + (y - \frac{1}{2}) + (-1)(z + \frac{1}{2}) = 0$

Hay $2x - 2y + 2z - 1 = 0$ 0,25

Ta có $d(O, (P)) = \frac{|-1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ 0,25

Do đó phương trình mặt cầu tâm O tiếp xúc với (P) là $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{12}$ 0,25

Hay $12x^2 + 12y^2 + 12z^2 - 1 = 0$

Câu 9 (0,5 điểm)

Không gian mẫu Ω là tập hợp gồm tất cả các cặp hai bộ 3 câu hỏi, mà ở vị trí thứ nhất của cặp là bộ 3 câu hỏi thí sinh A chọn và ở vị trí thứ hai của cặp là bộ 3 câu hỏi thí sinh B chọn.

0,25

Vì A cũng như B đều có C_{10}^3 cách chọn 3 câu hỏi từ 10 câu hỏi thì nên theo quy tắc nhân ta có

$$n(\Omega) = (C_{10}^3)^2$$

Khí hiệu X là biến cố “bộ 3 câu hỏi A chọn và bộ 3 câu hỏi B chọn là giống nhau”

Vì mỗi cách chọn 3 câu hỏi A, B chỉ có duy nhất cách chọn 3 câu hỏi giống như A nên $n(\Omega_x) =$

$$C_{10}^3 \cdot 1 = C_{10}^3$$

$$\text{Vì vậy } P(X) = \frac{n(\Omega_x)}{n(\Omega)} = \frac{C_{10}^3}{(C_{10}^3)^2} = \frac{1}{120} \quad 0,25$$

Câu 10 (1,0 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy với mỗi số thực x, xét các điểm A(x; x + 1),

$$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right) \text{ và } C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right) \quad 0,25$$

Khi đó ta có $P = \frac{OA}{a} + \frac{OB}{b} + \frac{OC}{c}$ trong đó a = BC, b = CA, c = AB

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC ta có

$$P = \frac{OA.GA}{a.GA} + \frac{OB.GB}{b.GB} + \frac{OC.GC}{c.GC} = \frac{3}{2} \left(\frac{OA.GA}{a.m_a} + \frac{OB.GB}{b.m_b} + \frac{OC.GC}{c.m_c} \right) \quad 0,25$$

Trong đó m_a ; m_b ; m_c tương ứng là độ dài đường trung tuyến xuất phát từ A, B, C của tam giác ABC

Theo bất đẳng thức cosi cho hai số thực không âm ta có

$$a.m_a = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3a^2(2b^2 + 2c^2 - a^2)} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{3a^2 + (2b^2 + 2c^2 - a^2)}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}} \quad 0,25$$

bằng cách tương tự ta cũng có $b.m_b \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}}$ và $c.m_c \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}}$

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{3\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2} (OA.GA + OB.GB + OC.GC) \quad (1)$$

Ta có

$$OA.GA + OB.GB + OC.GC \geq \vec{OA} \cdot \vec{GA} + \vec{OB} \cdot \vec{GB} + \vec{OC} \cdot \vec{GC} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{GA} + \vec{OB} \cdot \vec{GB} + \vec{OC} \cdot \vec{GC} &= (\vec{OG} + \vec{GA}) \cdot \vec{GA} + (\vec{OG} + \vec{GB}) \cdot \vec{GB} + (\vec{OG} + \vec{GC}) \cdot \vec{GC} \\ &= \vec{OG} \cdot (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 \\ &= \frac{4}{9} (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \quad (3) \quad 0,25 \end{aligned}$$

Từ (1) (2)(3) suy ra $P \geq \sqrt{3}$

Hơn nữa bằng kiểm tra trực tiếp ta thấy $P = \sqrt{3}$ khi $x = 0$

Vậy $\min P = \sqrt{3}$