SỞ GD VÀ ĐT BẮC NINH
TRƯỜNG THPT LÊ VĂN THỊNH
(Đề thi gồm 06 trang)

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG ĐẦU NĂM
NĂM HỌC 2018-2019
Môn: TOÁN 12
Ngày thi: 16 tháng 9 năm 2018
Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian phát đề)

Họ, tên thí sinh:... Số báo danh: ....

Mã đề thi 132

Câu 1: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $\left[2;4\right]$ là:

A. $\min\limits_{[2;\,4]} y = 3$.
B. $\min\limits_{[2;\,4]} y = 7$.
C. $\min\limits_{[2;\,4]} y = 5$.
D. $\min\limits_{[2;\,4]} y = 0$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm trên đoạn $\left[a;b\right]$. Ta xét các khẳng định sau:

$\left(1\right)$Nếu hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực đại tại điểm $x_0 \in \left(a;b\right)$ thì $f\left(x_0\right)$ là giá trị lớn nhất của $f\left(x\right)$ trên $\left[a;b\right]$.

$\left(2\right)$ Nếu hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực đại tại điểm $x_0 \in \left(a;b\right)$ thì $f\left(x_0\right)$ là giá trị nhỏ nhất của $f\left(x\right)$ trên $\left[a;b\right]$.

$\left(3\right)$Nếu hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực đại tại điểm x_0 và đạt cực tiểu tại điểm x_1 $\left(x_0, x_1 \in \left(a;b\right)\right)$ thì ta luôn có $f\left(x_0\right) > f\left(x_1\right)$.

Số khẳng định đúng là?

A. 3.
B. 2.
C. 1.
D. 0.

Câu 3: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình?

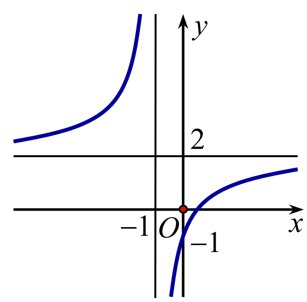
A. $y = 5$.
B. $y = 0$.
C. $x = 1$.
D. $y = 1$.

Câu 4: Cho cấp số cộng $\left(u_n\right)$ có số hạng tổng quát là $u_n = 3n - 2$. Tìm công sai d của cấp số cộng.

A. $d = 2$.
B. $d = -2$.
C. $d = 3$.
D. $d = -3$.

Câu 5:

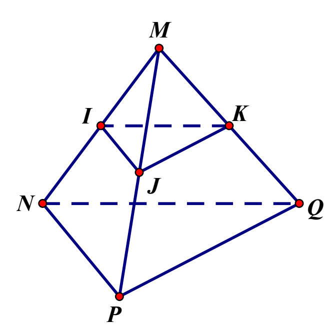
Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.
B. $y = \dfrac{1-2x}{x+1}$.
C. $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.
D. $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

Câu 6:

Cho tứ diện $MNPQ$. Gọi I; J; K lần lượt là trung điểm của các cạnh MN; MP; MQ. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_{MIJK}}{V_{MNPQ}}$ bằng



A. $\dfrac{1}{4}$.
B. $\dfrac{1}{3}$.
C. $\dfrac{1}{8}$.
D. $\dfrac{1}{6}$.

Câu 7: Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là:

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
B. $\mathbb{R} \setminus \left\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $\mathbb{R}$.
D. $\mathbb{R} \setminus \left\{0\right\}$.

Câu 8: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai**.

A. Nếu $b // a$ thì $b // (P)$.
B. Nếu $b // (P)$ thì $b \perp a$.
C. Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$.
D. Nếu $b \perp (P)$ thì $b // a$.

Câu 9: Nghiệm của phương trình $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ là

A. $\left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.
B. $\left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.
C. $\left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.
D. $\left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=-\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Câu 10: Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0 ?

A. $u_n=\frac{n^3-3n}{n+1}$.
B. $u_n=\left(\frac{6}{5}\right)^n$.
C. $u_n=n^2-4n$.
D. $u_n=\left(\frac{-2}{3}\right)^n$.

Câu 11: Trong không gian cho bốn điểm không đồng phẳng. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đã cho?

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 12: Khối đa diện đều có 12 mặt thì có số cạnh là:

A. 30. **B.** 60. **C.** 12. **D.** 24.

Câu 13: Cho tập $A=\{0;2;4;6;8\}$; $B=\{3;4;5;6;7\}$. Tập $A\setminus B$ là

A. $\{0;6;8\}$. **B.** $\{0;2;8\}$. **C.** $\{3;6;7\}$. **D.** $\{0;2\}$.

Câu 14: Cho hàm số $y=x^3-3x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Câu 15: Hàm số $y=x^3-3x^2+3x-4$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

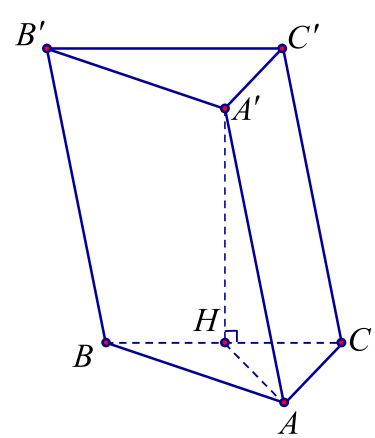
Câu 16: Tìm hệ số của x^6 trong khai triển thành đa thức của $(2-3x)^{10}$.

A. $-C_{10}^4.2^6.(-3)^4$.
B. $C_{10}^6.2^4.(-3)^6$.
C. $-C_{10}^6.2^4.3^6$.
D. $C_{10}^6.2^6.(-3)^4$.

Câu 17:

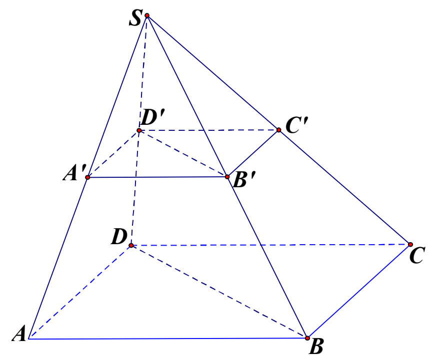
Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA'=\frac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm BC. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó.

A. $V=\frac{2a^3}{3}$.
B. $V=\frac{3a^3}{4\sqrt{2}}$.
C. $V=a^3\sqrt{\frac{3}{2}}$.
D. $V=a^3$.



Câu 18:

Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$.



A. $\dfrac{1}{16}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$.

C. $\dfrac{1}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 19: Một tổ công nhân có 12 người. Cần chọn 3 người để đi làm cùng một nhiệm vụ, hỏi có bao nhiêu cách chọn?

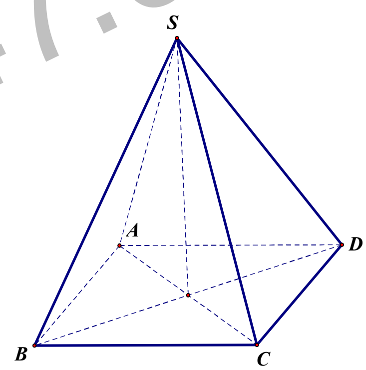
A. C_{12}^{3}. **B.** 12^{3}. **C.** $12!$. **D.** A_{12}^{3}.

Câu 20: Phương trình $\cos 2x + 4\sin x + 5 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $\left(0;10\pi\right)$?

A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 21:

Cho hình chóp đều $S.ABCD$, cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy là $60°$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $\left(SCD\right)$.



A. $\dfrac{a}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

C. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Câu 22: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x - y + 1 = 0$. Phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ nào sau đây biến đường thẳng d thành chính nó?

A. $\vec{v} = \left(-1;2\right)$. **B.** $\vec{v} = \left(2;-4\right)$. **C.** $\vec{v} = \left(2;4\right)$. **D.** $\vec{v} = \left(2;1\right)$.

Câu 23: Cho cấp số nhân $\left(u_n\right)$ có $u_1 = -3$, công bội $q = -2$. Hỏi -192 là số hạng thứ mấy của $\left(u_n\right)$?

A. Số hạng thứ 7. **B.** Số hạng thứ 6. **C.** Số hạng thứ 8. **D.** Số hạng thứ 5.

Câu 24: Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\lim \dfrac{1}{n} = 0$. **B.** $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số).

C. $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0 \left(k > 1\right)$. **D.** $\lim q^n = 0 \left(\left|q\right| > 1\right)$.

Câu 25: Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$:

A. $y' = -\dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}$.

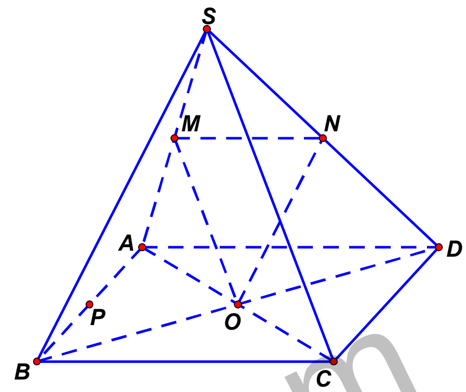
C. $y' = \dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}$. **D.** $y' = -\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}$.

Câu 26: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}\left(C\right)$, đồ thị $\left(C\right)$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 27:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB. Khẳng định nào sau đây ***đúng***?



A. $\left(PON\right)\cap\left(MNP\right)=NP$.

B. $\left(NMP\right)//\left(SBD\right)$.

C. $\left(MON\right)//\left(SBC\right)$.

D. $\left(NOM\right)$ cắt $\left(OPM\right)$.

Câu 28: Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC biết $A\left(1;3\right)$, $B\left(-2;-2\right)$, $C\left(3;1\right)$. Tính cosin góc A của tam giác.

A. $\cos A=\dfrac{2}{\sqrt{17}}$. **B.** $\cos A=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$.

C. $\cos A=-\dfrac{2}{\sqrt{17}}$. **D.** $\cos A=-\dfrac{1}{\sqrt{17}}$.

Câu 29: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{2-x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Câu 30: Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[0;1]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1\le m<3$. **B.** $m>6$.

C. $m<1$. **D.** $3<m\le 6$.

Câu 31: Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để trong ba quyển sách lấy ra có ít nhất một quyển là toán.

A. $\dfrac{2}{7}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{37}{42}$. **D.** $\dfrac{10}{21}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$, $SA=a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin\alpha$, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng $\left(SBC\right)$.

A. $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{7}}{8}$. **C.** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ và $SO=a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

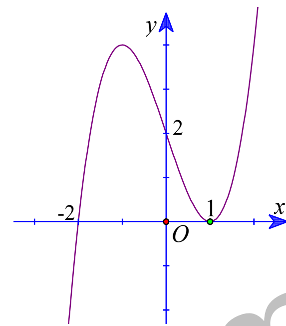
A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 34: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và AB' bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. C. $\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$. D. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 35:

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-3\right)$.



A. 3. B. 2.

C. 5. D. 4.

Câu 36: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;1\right)$. Tìm số phần tử của S.

A. 2. B. 5. C. 1. D. 3.

Câu 37: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} ax^2+bx+1, x\ge 0 \\ ax-b-1, x<0 \end{cases}$. Khi hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm tại $x_0=0$. Hãy tính $T=a+2b$.

A. $T=4$. B. $T=0$. C. $T=-6$. D. $T=-4$.

Câu 38: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 39: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ biết $AD=2AB$, đường thẳng AC có phương trình $x+2y+2=0$, $D\left(1;1\right)$ và $A\left(a;b\right)$ $\left(a,b\in\mathbb{R}, a>0\right)$. Tính $a+b$.

A. $a+b=-4$. B. $a+b=-3$.

C. $a+b=4$. D. $a+b=1$.

Câu 40: Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $4\sin x+\left(m-4\right)\cos x-2m+5=0$ có nghiệm là:

A. 5. B. 6. C. 3. D. 10.

Câu 41: Biết n là số nguyên dương thỏa mãn $x^n=a_0+a_1\left(x-2\right)+a_2\left(x-2\right)^2+...+a_n\left(x-2\right)^n$ và $a_1+a_2+a_3=2^{n-3}.192$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $n\in\left(9;16\right)$. B. $n\in\left(8;12\right)$.

C. $n\in\left(7;9\right)$. D. $n\in\left(5;8\right)$

Câu 42: Giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\dfrac{\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\cos x+2}$ là

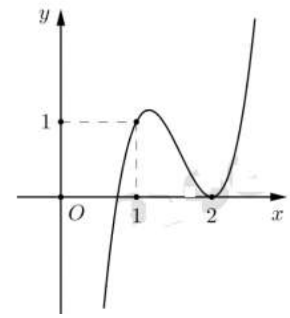
A. $m=-2;\ M=1$. B. $m=-1;\ M=2$. C. $m=-\dfrac{1}{2};\ M=1$. D. $m=1;\ M=2$.

Câu 43: Xét tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AB=BC=CD=DA=1$ và AC,BD thay đổi. Giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{3}}{27}$. B. $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$. C. $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. D. $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$.

Câu 44:

Cho hàm số bậc ba $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{2x-1}}{x\left[f^2\left(x\right)-f\left(x\right)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 5.
B. 4.
C. 6.
D. 3.

Câu 45: Cho hàm số $y=\left|\dfrac{x^4+ax+a}{x+1}\right|$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $\left[1;2\right]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $M\geq 2m$.

A. 15.
B. 14.
C. 13.
D. 16.

Câu 46: Cho hai đường thẳng cố định a và b chéo nhau. Gọi AB là đoạn vuông góc chung của a và b (A huộc a, B thuộc b). Trên a lấy điểm M (khác A), trên b lấy điểm N (khác B) sao cho $AM=x, BN=y, x+y=8$. Biết $AB=6$, góc giữa hai đường thẳng a và b bằng 60^0. Khi thể tích khối tứ diện $ABNM$ đạt giá trị lớn nhất hãy tính độ dài đoạn MN (trong trường hợp $MN>8$)

A. 13.
B. 12.
C. $2\sqrt{39}$.
D. $2\sqrt{21}$.

Câu 47: Cho tập hợp $A=\left\{1;2;3;4...;100\right\}$. Gọi S là tập hợp gồm tất cả các tập con của A, mỗi tập con này gồm 3 phần tử của A và có tổng bằng 91. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của S. Xác suất chọn được phần tử có 3 số lập thành cấp số nhân bằng?

A. $\dfrac{1}{645}$.
B. $\dfrac{3}{645}$.
C. $\dfrac{4}{645}$.
D. $\dfrac{2}{645}$.

Câu 48: Biết m là giá trị để hệ bất phương trình $\begin{cases}0<x+y\leq 1\\ x+y+\sqrt{2xy+m}\geq 1\end{cases}$ có nghiệm thực duy nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m\in\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right)$.
B. $m\in\left(-\dfrac{3}{4};0\right)$.
C. $m\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.
D. $m\in\left(-2;-1\right)$.

Câu 49: Cho hàm số $y=x^3-3x+2\left(C\right)$. Biết rằng đường thẳng $d:y=ax+b$ cắt đồ thị $\left(C\right)$ tại ba điểm phân biệt M,N,P. Tiếp tuyến tại ba điểm M,N,P của đồ thị $\left(C\right)$ cắt $\left(C\right)$ tại các điểm M',N',P' (tương ứng khác M,N,P). Khi đó đường thẳng đi qua ba điểm M',N',P' có phương trình là

A. $y=ax+b$.
B. $y=\left(4a+9\right)x+18-8b$.
C. $y=-\left(8a+18\right)x+18-8b$.
D. $y=\left(4a+9\right)x+14-8b$.

Câu 50: Cho phương trình:

$$\sin^3x+2\sin x+3=\left(2\cos^3x+m\right)\sqrt{2\cos^3x+m-2}+2\cos^3x+\cos^2x+m.$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right)$?

A. 4.
B. 2.
C. 3.
D. 1.

----------- HẾT ----------

SỞ GD VÀ ĐT BẮC NINH
TRƯỜNG THPT LÊ VĂN THỊNH

ĐÁP ÁN ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG ĐẦU NĂM
NĂM HỌC 2018-2019
Môn: TOÁN 12
Ngày thi: 16 tháng 9 năm 2018

Đề gốc

I. NHẬN BIẾT

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là:

A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
B. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $\mathbb{R}$.
D. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện xác định: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 2: Nghiệm của phương trình $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ là

A. $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.
B. $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.
C. $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.
D. $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 3: Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 3n - 2$. Tìm công sai d của cấp số cộng.

A. $d = 3$.
B. $d = 2$.
C. $d = -2$.
D. $d = -3$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2 = 3$

Suy ra $d = 3$ là công sai của cấp số cộng.

Câu 4: Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $u_n = \left(\frac{-2}{3}\right)^n$.
B. $u_n = \left(\frac{6}{5}\right)^n$.
C. $u_n = \frac{n^3 - 3n}{n+1}$.
D. $u_n = n^2 - 4n$.

Lời giải:

Chọn A.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^n = 0$ (Vì $\left|\frac{-2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$).

Câu 5: Trong không gian cho bốn điểm không đồng phẳng. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đã cho?

A. 6. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B.

Vì 4 điểm không đồng phẳng tạo thành một tứ diện mà tứ diện có 4 mặt.

Câu 6: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai**.

A. Nếu $b // a$ thì $b // (P)$. **B.** Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$.

C. Nếu $b \perp (P)$ thì $b // a$. **D.** Nếu $b // (P)$ thì $b \perp a$.

Lời giải

Chọn A.

Nếu $a \perp (P)$ và $b // a$ thì $b \perp (P)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = x^3 - 3x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta chọn đáp án **D.**

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[a;b]$. Ta xét các khẳng định sau:

(1) Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x_0 \in (a;b)$ thì $f(x_0)$ là giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

(2) Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x_0 \in (a;b)$ thì $f(x_0)$ là giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

(3) Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 và đạt cực tiểu tại điểm x_1 $(x_0, x_1 \in (a;b))$ thì ta luôn có $f(x_0) > f(x_1)$.

Số khẳng định đúng là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 9: Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3\left(x-1\right)^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho có đạo hàm không đổi dấu trên $\mathbb{R}$ nên nó không có cực trị.

Câu 10: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $\left[2;4\right]$ là:

A. $\min\limits_{[2;\,4]} y = 3$. **B.** $\min\limits_{[2;\,4]} y = 7$. **C.** $\min\limits_{[2;\,4]} y = 5$. **D.** $\min\limits_{[2;\,4]} y = 0$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \notin \left[2;4\right] \\ x = -1 \notin \left[2;4\right] \end{array}\right.$ mà $\left\{\begin{array}{l} f\left(2\right) = 7 \\ f\left(4\right) = 57 \end{array}\right. \Rightarrow \min\limits_{[2;\,4]} y = 7$.

Câu 11: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình?

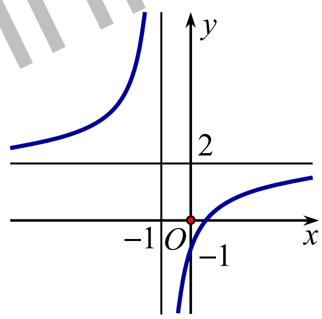
A. $y = 5$. **B.** $y = 0$. **C.** $x = 1$. **D.** $y = 1$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-3}{x-1} = 1 \Rightarrow$ đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 12: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. **B.** $y = \dfrac{1-2x}{x+1}$. **C.** $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. **D.** $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

Lời giải

Chọn A.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = -1 \Rightarrow$ loại đáp án **C.**

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(0;-1\right) \Rightarrow$ loại đáp án B và **D.**

Câu 13: Khối đa diện đều có 12 mặt thì có số cạnh là:

A. 30. **B.** 60. **C.** 12. **D.** 24.

Lời giải

Chọn A.

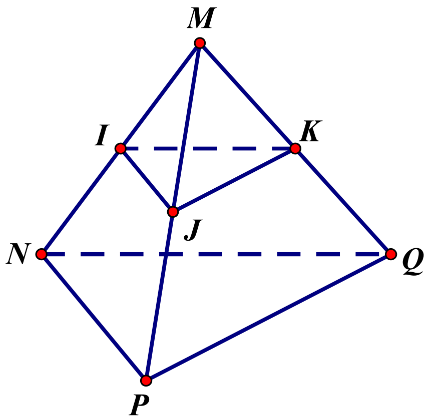
Khối đa diện đều có 12 mặt là khối đa diện đều loại $\left\{5;3\right\}$ thì có số cạnh là 30.

Câu 14: Cho tứ diện $MNPQ$. Gọi I; J; K lần lượt là trung điểm của các cạnh MN; MP; MQ. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_{MIJK}}{V_{MNPQ}}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có: $\dfrac{V_{M.IJK}}{V_{M.NPQ}} = \dfrac{MI}{MN}.\dfrac{MJ}{MP}.\dfrac{MK}{MQ} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.

Câu 15: Cho tập $A = \{0;2;4;6;8\}$; $B = \{3;4;5;6;7\}$. Tập $A \setminus B$ là

A. $\{0;6;8\}$. **B.** $\{0;2;8\}$. **C.** $\{3;6;7\}$. **D.** $\{0;2\}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $A \setminus B = \{0;2;8\}$.

II. THÔNG HIỂU

Câu 16: Phương trình $\cos 2x + 4\sin x + 5 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(0;10\pi)$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A.

PT đã cho $\Leftrightarrow -2\sin^2 x + 4\sin x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \sin x = 3\ (VN)\end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ (k \in \mathbb{Z})$.

Theo đề: $x \in (0;10\pi) \Rightarrow 0 < -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi < 10\pi \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} < k < \dfrac{21}{4}$.

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1;2;3;4;5\}$. Vậy PT đã cho có 5 nghiệm trên khoảng $(0;10\pi)$.

Câu 17: Một tổ công nhân có 12 người. Cần chọn 3 người để đi làm cùng một nhiệm vụ, hỏi có bao nhiêu cách chọn?

A. A_{12}^3. **B.** $12!$. **C.** C_{12}^3. **D.** 12^3.

Lời giải

Chọn C.

Số cách chọn 3 người, là C_{12}^3 (cách chọn)

Câu 18: Tìm hệ số của x^6 trong khai triển thành đa thức của $(2-3x)^{10}$.

A. $C_{10}^6.2^6.(-3)^4$. **B.** $C_{10}^6.2^4.(-3)^6$. **C.** $-C_{10}^4.2^6.(-3)^4$. **D.** $-C_{10}^6.2^4.3^6$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $(2-3x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k.2^{10-k}.(-3x)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k.2^{10-k}.(-3)^k.x^k$

Theo giả thiết suy ra: $k = 6$.

Vậy hệ số của x^6 trong khai triển là $C_{10}^6.2^{10-6}.(-3)^6 = C_{10}^6.2^4.(-3)^6$.

Câu 19: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$, công bội $q = -2$. Hỏi -192 là số hạng thứ mấy của (u_n)?

A. Số hạng thứ 6. **B.** Số hạng thứ 7. **C.** Số hạng thứ 5. **D.** Số hạng thứ 8.

Lời giải

Chọn B.

Giả sử -192 là số hạng thứ n của (u_n) với $n \in \mathbb{N}^*$.Ta có

$-192 = u_1.q^{n-1} \Leftrightarrow -192 = (-3).(-2)^{n-1} \Leftrightarrow 64 = (-2)^{n-1} \Leftrightarrow (-2)^6 = (-2)^{n-1} \Leftrightarrow 6 = n-1$

$\Leftrightarrow 7 = n$. Do đó -192 là số hạng thứ 7 của (u_n).

Câu 20: Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số). **B.** $\lim q^n = 0\ (|q| > 1)$.

C. $\lim \dfrac{1}{n} = 0$. **D.** $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0\ (k > 1)$.

Lời giải

Chọn B.

Theo định nghĩa giới hạn hữu hạn của dãy số (SGK ĐS11-Chương 4) thì $\lim q^n = 0\ (|q| < 1)$.

Câu 21: Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$:

A. $y' = -\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}$.

C. $y' = \dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}$. **D.** $y' = -\dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}$.

Giải:

Chọn A

$$y' = \left(\frac{\pi}{4} - x\right)'.\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = -\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$$

Câu 22: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x - y + 1 = 0$. Phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ nào sau đây biến đường thẳng d thành chính nó?

A. $\vec{v} = (2;4)$. **B.** $\vec{v} = (2;1)$. **C.** $\vec{v} = (-1;2)$. **D.** $\vec{v} = (2;-4)$.

Lời giải

Chọn A.

Phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến đường thẳng d thành chính nó khi vectơ $\vec{v}$ cùng phương với vectơ chỉ phương của d. Mà d có VTCP $\vec{u} = (1;2)$.

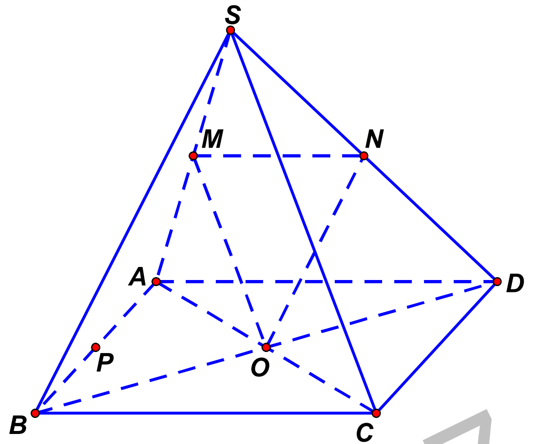
Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB. Khẳng định nào sau đây ***đúng***?

A. (NOM) cắt (OPM). **B.** $(MON) // (SBC)$.

C. $\left(PON\right)\cap\left(MNP\right)=NP$. **D.** $\left(NMP\right)//\left(SBD\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Xét hai mặt phẳng $\left(MON\right)$ và $\left(SBC\right)$.

Ta có: $OM\ //\ SC$ và $ON\ //\ SB$.

Mà $BS\cap SC=C$ và $OM\cap ON=O$.

Do đó $\left(MON\right)//\left(SBC\right)$.

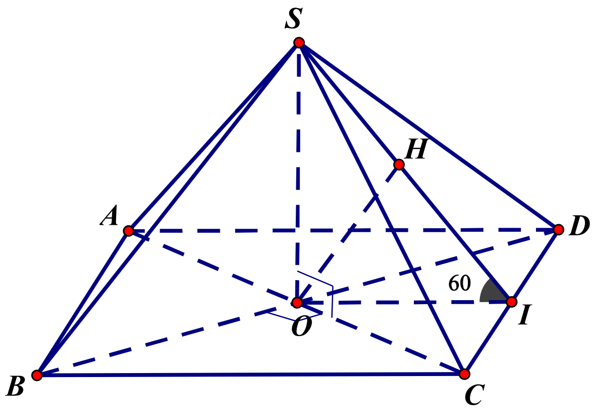
Câu 24: Cho hình chóp đều $S.ABCD$, cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy là $60°$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $\left(SCD\right)$.

A. $\frac{a}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

* Ta có: $\frac{d\left(B;\left(SCD\right)\right)}{d\left(O;\left(SCD\right)\right)}=\frac{BD}{OD}=2\ \Rightarrow d\left(B;\left(SCD\right)\right)=2.d\left(O;\left(SCD\right)\right)=2OH$. Trong đó H là hình chiếu vuông góc của O lên $\left(SCD\right)$.



* Gọi I là trung điểm của CD ta có:

$$\begin{cases}SI\perp CD\\OI\perp CD\end{cases}\Rightarrow\left(\left(SCD\right);\left(ABCD\right)\right)=\left(OI;SI\right)=\widehat{SIO}=60°.$$

Xét tam giác SOI vuông tại O ta có: $SO=OI.\tan 60=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

* Do $SOCD$ là tứ diện vuông tại O nên:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OC^2}+\frac{1}{OD^2}+\frac{1}{OS^2}=\frac{2}{a^2}+\frac{2}{a^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{16}{3a^2}$$

$$\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{3}}{4}\Rightarrow d\left(B;\left(SCD\right)\right)=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 25: Cho hàm số $y=\frac{x+1}{2-x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.
B. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$.
D. Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y=\frac{x+1}{2-x}=\frac{x+1}{-x+2}=\frac{3}{\left(-x+2\right)^2}>0,\ \forall x\neq 2.$

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;2\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$.

Câu 26: Cho hàm số $y=\frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[0;1]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1\leq m<3$. **B.** $m>6$. **C.** $m<1$. **D.** $3<m\leq 6$.

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}$.

Với $m=1\Rightarrow y=1,\ \forall x\in\left[0;1\right]$ thì $\min\limits_{[0;1]} y\neq 3$.

Suy ra $m\neq 1$. Khi đó $y'=\frac{1-m}{\left(x+1\right)^2}$ không đổi dấu trên từng khoảng xác định.

TH 1: $y'>0\Leftrightarrow m<1$ thì $\min\limits_{[0;1]} y=y\left(0\right)\Rightarrow m=3$ (loại).

TH 2: $y'<0\Leftrightarrow m>1$ thì $\min\limits_{[0;1]} y=y\left(1\right)\Rightarrow m=5$ (thỏa mãn).

Câu 27: Cho hàm số $y=\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}\left(C\right)$, đồ thị $\left(C\right)$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{1;2\right\}$

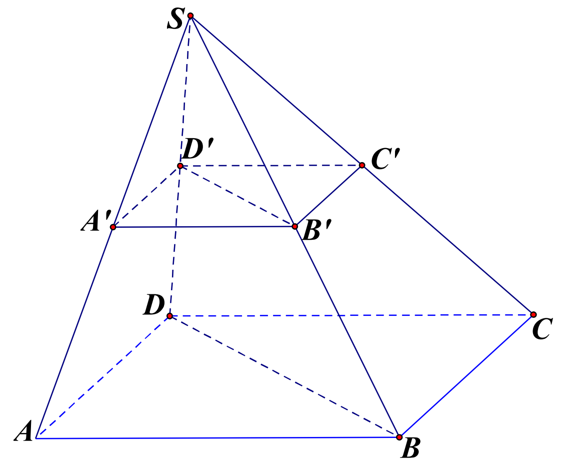
Ta có $y=\frac{x+2}{x-2}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang của là $y=1$ và là tiệm cận đứng là $x=2$

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$.

A. $\frac{1}{16}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C.



Ta có $\dfrac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow \dfrac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{16}$.

Và $\dfrac{V_{S.B'D'C'}}{V_{S.BDC}} = \dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SD'}{SD}.\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow \dfrac{V_{S.B'D'C'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{16}$.

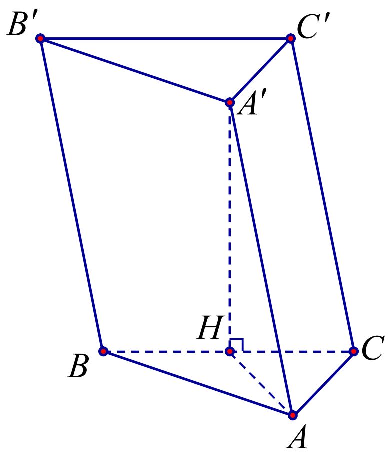
Suy ra $\dfrac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABCD}} + \dfrac{V_{S.B'D'C'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow \dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{8}$.

Câu 29: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA' = \dfrac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên $\left(ABC\right)$ là trung điểm BC. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó.

A. $V = a^3$. **B.** $V = \dfrac{2a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{3a^3}{4\sqrt{2}}$. **D.** $V = a^3\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi H là trung điểm BC.

Theo giả thiết, $A'H$ là đường cao hình lăng trụ và $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy, thể tích khối lăng trụ là $V = S_{\Delta ABC}.A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Câu 30: Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC biết $A\left(1;3\right)$, $B\left(-2;-2\right)$, $C\left(3;1\right)$. Tính cosin góc A của tam giác.

A. $\cos A=\frac{2}{\sqrt{17}}$. **B.** $\cos A=\frac{1}{\sqrt{17}}$. **C.** $\cos A=-\frac{2}{\sqrt{17}}$. **D.** $\cos A=-\frac{1}{\sqrt{17}}$.

Lời giải:

Chọn B.

$\overrightarrow{AB}=\left(-3;-5\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(2;-2\right)$.

$$\cos A=\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}=\frac{-3.2+5.2}{\sqrt{34}.2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$$

III. VẬN DỤNG

Câu 31: Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $4\sin x+\left(m-4\right)\cos x-2m+5=0$ có nghiệm là:

A. 5. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

$4\sin x+\left(m-4\right)\cos x-2m+5=0\Leftrightarrow 4\sin x+\left(m-4\right)\cos x=2m-5$.

Phương trình có nghiệm khi $4^2+\left(m-4\right)^2-\left(2m-5\right)^2\geq 0\Leftrightarrow -3m^2+12m+7\geq 0$

$$\Leftrightarrow\frac{6-\sqrt{57}}{3}\leq m\leq\frac{6+\sqrt{57}}{3}$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{0,1,2,3,4\right\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm là. 10.

Câu 32: Giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\frac{\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\cos x+2}$ là

A. $m=-\frac{1}{2}$; $M=1$. **B.** $m=1$; $M=2$. **C.** $m=-2$; $M=1$. **D.** $m=-1$; $M=2$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y=\frac{\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\cos x+2}\Leftrightarrow\left(y-1\right)\sin x+\left(y-2\right)\cos x=1-2y\ \left(*\right)$

Phương trình $\left(*\right)$ có nghiệm

$\Leftrightarrow\left(y-1\right)^2+\left(y-2\right)^2\geq\left(1-2y\right)^2\Leftrightarrow y^2+y-2\leq 0\Leftrightarrow -2\leq y\leq 1$.

Vậy $m=-2$; $M=1$.

Câu 33: Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để trong ba quyển sách lấy ra có ít nhất một quyển là toán.

A. $\frac{2}{7}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{37}{42}$. **D.** $\frac{10}{21}$.

Lời giải

Chọn C.

Số kết quả có thể khi chọn bất kì 3 quyển sách trong 9 quyển sách là $C_9^3=84$.

Gọi A là biến cố ‘ Lấy được ít nhất 1 sách toán trong 3 quyển sách.’

$\overline{A}$ là biến cố ‘ Không lấy được sách toán trong 3 quyển sách.’

Ta có xác sút để xảy ra A là $P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\frac{C_5^3}{84}=\frac{37}{42}$.

Câu 34: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} ax^2+bx+1, x\ge 0 \\ ax-b-1, x<0 \end{cases}$. Khi hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm tại $x_0=0$. Hãy tính $T=a+2b$.

A. $T=-4$. **B.** $T=0$. **C.** $T=-6$. **D.** $T=4$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f\left(0\right)=1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(ax^2+bx+1\right)=1$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(ax-b-1\right)=-b-1$.

Để hàm số có đạo hàm tại $x_0=0$ thì hàm số phải liên tục tại $x_0=0$ nên

$f\left(0\right)=\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)$. Suy ra $-b-1=1\Leftrightarrow b=-2$.

Khi đó $f\left(x\right)=\begin{cases} ax^2-2x+1, x\ge 0 \\ ax+1, x<0 \end{cases}$.

Xét:

+) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{ax^2-2x+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(ax-2\right)=-2$.

+) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{ax+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(a\right)=a$.

Hàm số có đạo hàm tại $x_0=0$ thì $a=-2$.

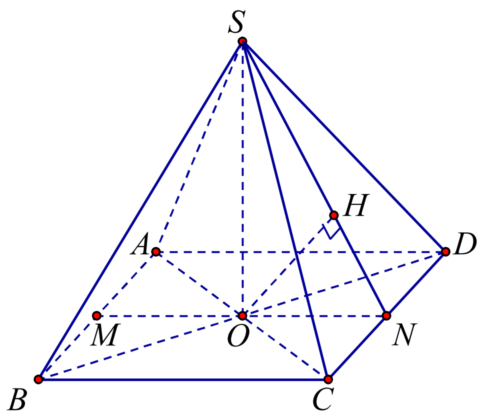
Vậy với $a=-2, b=-2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x_0=0$ khi đó $T=-6$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ và $SO=a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD; H là hình chiếu vuông góc của O trên SN.

Vì $AB//CD$ nên $d\left(AB,\text{SC}\right)=d\left(AB,(SCD)\right)=d\left(M,(SCD)\right)=2d\left(O,(SCD)\right)$ (vì O là trung điểm đoạn MN)

Ta có $\begin{cases}CD\perp SO\\CD\perp ON\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SON)\Rightarrow CD\perp OH$

Khi đó $\begin{cases}CD\perp OH\\OH\perp SN\end{cases}\Rightarrow OH\perp(SCD)\Rightarrow d\left(O;(SCD)\right)=OH.$

Tam giác SON vuông tại O nên $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{ON^2}+\dfrac{1}{OS^2}=\dfrac{1}{\frac{a^2}{4}}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{5}{a^2}\Rightarrow OH=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$

Vậy $d\left(AB,\text{SC}\right)=2OH=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}.$

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$, $SA=a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin\alpha$, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng $\left(SBC\right)$.

A. $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{7}}{8}$. **B.** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

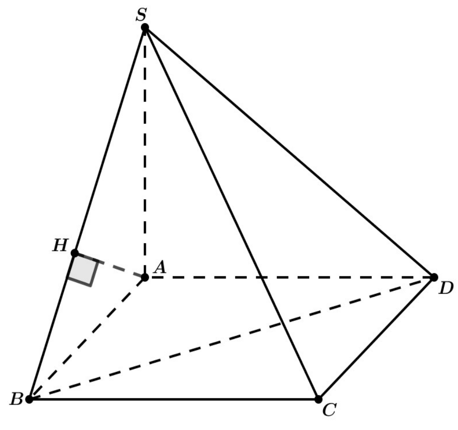
Lời giải

Chọn C

$ABCD$ là hình chữ nhật nên $BD=2a$, ta có $AD//\left(SBC\right)$ nên suy ra

$d\left[D,\left(SBC\right)\right]=d\left[A,\left(SBC\right)\right]=AH$ với $AH\perp SB$. Tam giác SAB vuông cân tại A nên H là trung điểm của SB suy ra $AH=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

vậy $\sin\widehat{BD,\left(SBC\right)}=\dfrac{d\left[D,\left(SBC\right)\right]}{BD}=\dfrac{d\left[A,\left(SBC\right)\right]}{BD}=\dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$



Câu 37: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;1\right)$. Tìm số phần tử của S.

A. 1. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

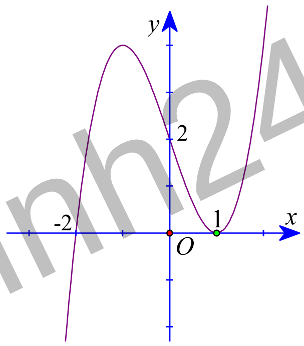
Chọn C.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$

$y'=\dfrac{m^2-4}{(2x+m)^2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ \dfrac{-m}{2}\notin(0;1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{-m}{2}\le 0 \\ \dfrac{-m}{2}\ge 1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m\ge 0 \\ m\le -2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow 0\le m<2$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2-3)$.



A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D.

Quan sát đồ thị ta có $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x=-2$ nên hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị là $x=-2$.

Ta có $y'=\left[f(x^2-3)\right]'=2x.f'(x^2-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3=-2 \\ x^2-3=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm 2\end{array}\right.$.

Mà $x=\pm 2$ là nghiệp kép, còn các nghiệm còn lại là nghiệm đơn nên hàm số $y=f(x^2-3)$ có ba cực trị.

Câu 39: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định: $D=[-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}}{1+\dfrac{2}{x}}=0 \Rightarrow y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\bullet \lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(5x+1)^2-x-1}{(x^2+2x)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{25x^2+9x}{(x^2+2x)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{25x+9}{(x-2)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)} = \dfrac{-9}{4} \Rightarrow x=0$

không là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

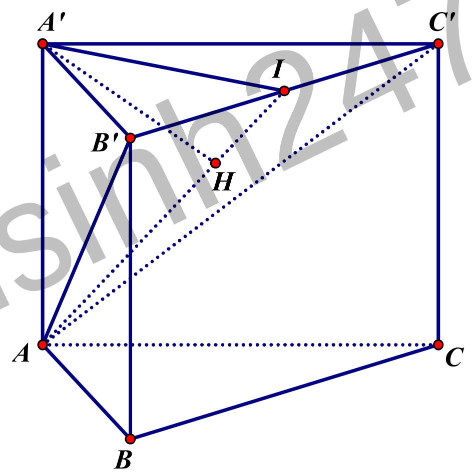
Vậy đồ thị hàm số có tất cả 1 đường tiệm cận.

Câu 40: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và AB' bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A.



Ta có $BC//B'C' \Rightarrow BC//(AB'C')$

suy ra $d(BC,AB') = d(BC,(AB'C')) = d(B,(AB'C')) = d(A',(AB'C'))$.

Gọi I và H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A' trên $B'C'$ và AI.

Ta có $B'C' \perp A'I$ và $B'C' \perp A'A$ nên $B'C' \perp (A'AI) \Rightarrow B'C' \perp A'H$ mà $AI \perp A'H$. Do đó $(AB'C') \perp A'H$

Khi đó $d(A',(AB'C')) = A'H = \dfrac{A'A.A'I}{\sqrt{A'A^2+A'I^2}} = \dfrac{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy khoảng cách cần tìm là $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 41: Biết n là số nguyên dương thỏa mãn $x^n = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + \ldots + a_n(x-2)^n$ và $a_1 + a_2 + a_3 = 2^{n-3}.192$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $n \in (9;16)$. **B.** $n \in (8;12)$. **C.** $n \in (7;9)$. **D.** $n \in (5;8)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $x^n = \left[2+\left(x-2\right)\right]^n = C_n^0.2^n + C_n^1.2^{n-1}\left(x-2\right) + C_n^2.2^{n-2}\left(x-2\right)^2 + ... + C_n^n\left(x-2\right)^n$

Do đó $a_1 + a_2 + a_3 = 2^{n-3}.192 \Leftrightarrow C_n^1.2^{n-1} + C_n^2.2^{n-2} + C_n^3.2^{n-3} = 2^{n-3}.192$

$\Leftrightarrow C_n^1.4 + C_n^2.2 + C_n^3 = 192 \Leftrightarrow n = 9$

Câu 42: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ biết $AD = 2AB$, đường thẳng AC có phương trình $x + 2y + 2 = 0$, $D\left(1;1\right)$ và $A\left(a;b\right)$ $\left(a,b \in \mathbb{R}, a > 0\right)$. Tính $a + b$.

A. $a + b = -4$. **B.** $a + b = -3$. **C.** $a + b = 4$. **D.** $a + b = 1$.

Lời giải

Chọn D.

Gọi $A\left(a;b\right)$. Vì $A \in AC: x + 2y + 2 = 0$ nên $a + 2b + 2 = 0 \Rightarrow a = -2b - 2$

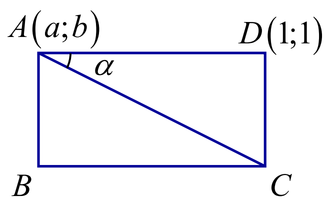
Do $a > 0$ nên $-2b - 2 > 0 \Rightarrow b < -1$ $\left(*\right)$

Khi đó $A\left(-2b-2;b\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AD} = \left(2b+3;1-b\right)$ là véctơ chỉ phương của đường thẳng AD.

$\vec{u} = \left(2;-1\right)$ là véctơ chỉ phương của đường thẳng AC.

Trên hình vẽ, $\tan\alpha = \dfrac{DC}{AD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $\left(1\right)$



Lại có $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{AD}.\vec{u}\right|}{\left|\overrightarrow{AD}\right|.\left|\vec{u}\right|} = \dfrac{5\left|b+1\right|}{\sqrt{5}\sqrt{b^2+2b+2}}$ $\left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra $\dfrac{5\left|b+1\right|}{\sqrt{5}\sqrt{b^2+2b+2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow b^2 + 2b - 3 = 0 \Rightarrow b = -3$ (do $\left(*\right)$)

$\Rightarrow a = 4$.

Khi đó $A\left(4;-3\right)$, suy ra $a + b = 1$.

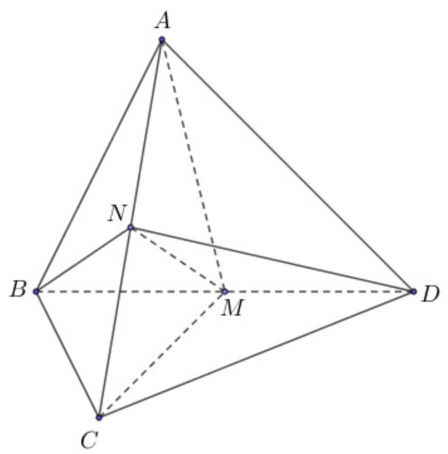
IV. VẬN DỤNG CAO

Câu 43: Xét tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AB = BC = CD = DA = 1$ và AC, BD thay đổi. Giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{27}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, AC. Đặt $BD = 2x, AC = 2y$ $\left(x, y > 0\right)$.

Ta có $CM \perp BD, AM \perp BD \Rightarrow BD \perp (AMC)$.

Ta có $MA = MC = \sqrt{1-x^2}$, $MN = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $S_{AMN} = \frac{1}{2}MN.AC = \frac{1}{2}y.\sqrt{1-x^2-y^2}$.

$V_{ABCD} = \frac{1}{3}.DB.S_{AMC} = \frac{1}{3}.2x.y\sqrt{1-x^2-y^2} = \frac{2}{3}\sqrt{x^2.y^2.(1-x^2-y^2)}$

$\leq \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(x^2+y^2+1-x^2-y^2)^3}{27}}$

$\Rightarrow V_{ABCD} \leq \frac{2\sqrt{3}}{27}$.

Câu 44: Cho hàm số $y = \left|\frac{x^4+ax+a}{x+1}\right|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1;2]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $M \geq 2m$.

A. 15. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^4+ax+a}{x+1}$. Ta có $f'(x) = \frac{3x^4+4x^3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [1;2]$

Do đó $f(1) \leq f(x) \leq f(2), \forall x \in [1;2]$ hay $a + \frac{1}{2} \leq f(x) \leq a + \frac{16}{3}, \forall x \in [1;2]$

Ta xét các trường hợp sau :

Th1 : Nếu $a + \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{1}{2}$ thì $M = a + \frac{16}{3}; m = a + \frac{1}{2}$

Theo đề bài $a + \frac{16}{3} \geq 2\left(a + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow a \leq \frac{13}{3}$

Do a nguyên nên $a \in \{0;1;2;3;4\}$.

Th2 : Nếu $a + \frac{16}{3} < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{16}{3}$ thì $m = -\left(a + \frac{16}{3}\right); M = -\left(a + \frac{1}{2}\right)$

Theo đề bài $-\left(a + \frac{1}{2}\right) \geq -2\left(a + \frac{16}{3}\right) \Leftrightarrow a \geq -\frac{61}{6}$

Do a nguyên nên $a \in \{-10;-9;...;-6\}$.

Th3 : Nếu $a + \frac{1}{2} \leq 0 \leq a + \frac{16}{3} \Leftrightarrow -\frac{16}{3} \leq a \leq -\frac{1}{2}$ thì $M \geq 0$; $m = 0$ (Luôn thỏa mãn)

Do a nguyên nên $a \in \{-5;-4;...;-1\}$

Vậy có 15 gái trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 45: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2\,(C)$. Biết rằng đường thẳng $d: y = ax + b$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt M, N, P. Tiếp tuyến tại ba điểm M, N, P của đồ thị (C) cắt (C) tại các điểm M', N', P' (tương ứng khác M, N, P). Khi đó đường thẳng đi qua ba điểm M', N', P' có phương trình là

A. $y = (4a+9)x + 18 - 8b$. **B.** $y = (4a+9)x + 14 - 8b$.

C. $y = ax + b$.

D. $y = -\left(8a + 18\right)x + 18 - 8b$.

Lời giải

Chọn A.

Giả sử $A\left(x_1;y_1\right);B\left(x_2;y_2\right);C\left(x_3;y_3\right)$. Ta có phương trình tiếp tuyến tại A của đồ thị $\left(C\right)$ là

$\Delta_1 : y = \left(3x_1^2 - 3\right)\left(x - x_1\right) + x_1^3 - 3x_1 + 2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $\left(C\right)$ và Δ_1 là

$$\left(3x_1^2 - 3\right)\left(x - x_1\right) + x_1^3 - 3x_1 + 2 = x^3 - 3x + 2 \Leftrightarrow \left(x - x_1\right)^2\left(x + 2x_1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = -2x_1 \end{array}\right.$$

Do đó $A'\left(-2x_1; -8x_1^3 + 6x_1 + 2\right)$

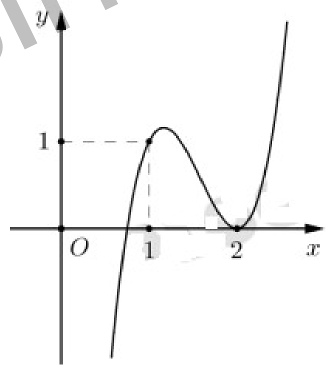
Lại có $-8x_1^3 + 6x_1 + 2 = -8\left(x_1^3 - 3x_1 + 2\right) - 18x_1 + 18 = -8\left(ax_1 + b\right) - 18x_1 + 18$

$$= -8\left(ax_1 + b\right) - 18x_1 + 18 = -2x_1\left(4a + 9\right) + 18 - 8b$$

Khi đó $y_{A'} = x_{A'}\left(4a + 9\right) + 18 - 8b$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua 3 điểm A', B', C' là $y = x\left(4a + 9\right) + 18 - 8b$

Câu 46: Cho hàm số bậc ba $f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hỏi đồ thị hàm số $g\left(x\right) = \dfrac{\left(x^2 - 3x + 2\right)\sqrt{2x - 1}}{x\left[f^2\left(x\right) - f\left(x\right)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A.

ĐK $x \geq \dfrac{1}{2}; f\left(x\right) \neq 0; f\left(x\right) \neq 1$.

$$\text{Xét phương trình } x\left[f^2\left(x\right) - f\left(x\right)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = a\left(a \in \left(0,5;1\right)\right) \\ x = 2 \\ x = 1 \\ x = b\left(b \in \left(1;2\right)\right) \\ x = c\left(c \in \left(2;3\right)\right) \end{array}\right.$$

Đồ thi hàm số có 4 đường tiệm cận đứng $x = a; x = b; x = c; x = 2$

Câu 47: Cho hai đường thẳng cố định a và b chéo nhau. Gọi AB là đoạn vuông góc chung của a và b

(A huộc a, B thuộc b). Trên a lấy điểm M (khác A), trên b lấy điểm N (khác B) sao cho $AM = x, BN = y, x + y = 8$. Biết $AB = 6$, góc giữa hai đường thẳng a và b bằng 60^0. Khi thể tích khối tứ diện $ABNM$ đạt giá trị lớn nhất hãy tính độ dài đoạn MN (trong trường hợp $MN > 8$)

A. $2\sqrt{21}$. **B.** 12. **C.** $2\sqrt{39}$. **D.** 13.

Lời giải

Chọn A.

Dựng hình chữ nhật $ABNC$.

$\widehat{(AM, BN)} = \widehat{(AM, AC)} = 60^0$

Ta có $\begin{cases} AB \perp AM \\ AB \perp BN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB \perp AM \\ AB \perp AC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACM)$

$V_{ABNM} = V_{MABC} = \frac{1}{3}AB.S_{ACM} = \frac{1}{6}AB.AC.AM\sin\widehat{CAM} = \frac{1}{6}.6.x.y.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}xy$

$V_{ABNM} = \frac{\sqrt{3}}{2}xy \le \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(x+y)^2}{4} = 8\sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 4$.

Khi đó $AM = BN = AC = 4$

Lại có $AB // CN \Rightarrow CN \perp (AMC) \Rightarrow CN \perp CM \Rightarrow MN^2 = CM^2 + CN^2$

Mặt khác $\widehat{MAC} = 60^0$ hoặc $\widehat{MAC} = 120^0$

Trường hợp 1: $\widehat{MAC} = 60^0 \Rightarrow \Delta AMC$ đều $\Rightarrow CM = 4 \Rightarrow MN = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$

Trường hợp 2: $\widehat{MAC} = 120^0$

$\Rightarrow CM = \sqrt{AM^2 + AC^2 - 2AM.AC\cos 120^0} = \sqrt{48} \Rightarrow MN = \sqrt{48 + 6^2} = 2\sqrt{41}$

Câu 48: Cho tập hợp $A = \{1;2;3;4...;100\}$. Gọi S là tập hợp gồm tất cả các tập con của A, mỗi tập con này gồm 3 phần tử của A và có tổng bằng 91. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của S. Xác suất chọn được phần tử có 3 số lập thành cấp số nhân bằng?

A. $\frac{4}{645}$. **B.** $\frac{2}{645}$. **C.** $\frac{3}{645}$. **D.** $\frac{1}{645}$.

Lời giải

Chọn C.

Giả sử tập con bất kì $\{a,b,c\} \in S \Rightarrow 1 \le a,b,c \le 100$; a,b,c phân biệt.

$a + b + c = 91$.

Đây là bài toán chia kẹo Euler nên số bộ a,b,c là C_{91-1}^{3-1}

Tuy nhiên trong các bộ trên vẫn chứa các bộ có 2 chữ số giống nhau, số bộ có 2 chữ số giống nhau là $3.45 = 135$ (bộ). Vậy $n(\Omega) = (C_{90}^2 - 3.45) : 3! = 645$.

Gọi A là biến cố: "a,b,c lập thành cấp số nhân"

Gọi q là công bội của cấp số nhân theo bài ra ta có $q > 0$

$a + aq + aq^2 = 91 \Leftrightarrow a(1 + q + q^2) = 1.91 = 13.7$

Trường hợp 1: $\begin{cases} a = 1 \\ 1 + q + q^2 = 91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ q = 9 \end{cases}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} a = 91 \\ 1 + q + q^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 91 \\ q = 0 \end{cases}$ (loại)

Trường hợp 3: $\begin{cases} a = 13 \\ 1+q+q^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13 \\ q = 2 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 3: $\begin{cases} a = 7 \\ 1+q+q^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ q = 3 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy $n(A) = 3$.

$P(A) = \dfrac{3}{645}$.

Câu 49: Biết m là giá trị để hệ bất phương trình $\begin{cases} 0 < x+y \le 1 \\ x+y+\sqrt{2xy+m} \ge 1 \end{cases}$ có nghiệm thực duy nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m \in \left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right)$. **B.** $m \in \left(-\dfrac{3}{4};0\right)$. **C.** $m \in \left(\dfrac{1}{3};1\right)$. **D.** $m \in (-2;-1)$.

Lời giải

Chọn B.

Hệ phương trình tương đương với:

$\begin{cases} 0 < x+y \le 1 \\ \sqrt{2xy+m} \ge 1-(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+y \le 1 \\ 2xy+m \ge 1-2x-2y+(x+y)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+y \le 1 & (\mathrm{I}) \\ (x-1)^2+(y-1)^2 \le m+1 & (\mathrm{II}) \end{cases}$.

Tập nghiệm của (I) là phần nằm giữa hai đường thẳng $d: y=-x$; $d': y=-x+1$ và trên d'.

Nếu $m \le -1$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

Nếu $m > -1$ thì tập nghiệm của (II) là hình tròn (C) (kể cả biên)

có tâm $A(1;1)$ bán kính $R = \sqrt{m+1}$.

Do đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi d' là tiếp tuyến của đường tròn (C).

Nghĩa là: $\sqrt{m+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $m = -\dfrac{1}{2}$.

Câu 50: Cho phương trình:

$$\sin^3 x + 2\sin x + 3 = (2\cos^3 x + m)\sqrt{2\cos^3 x + m - 2} + 2\cos^3 x + \cos^2 x + m.$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D.

Ta có:

$\sin^3 x + \sin^2 x + 2\sin x = \left(\sqrt{2\cos^3 x + m - 2}\right)^3 + \left(2\cos^3 x + m - 2\right) + 2\sqrt{2\cos^3 x + m - 2}\,(1)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ có $f'(t) = 6t^2 + 2t + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bởi vậy:

$(1) \Leftrightarrow f(\sin x) = f\left(\sqrt{2\cos^3 x + m - 2}\right) \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{2\cos^3 x + m - 2} \qquad (2)$

Với $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$ thì

$(2) \Leftrightarrow \sin^2 x = 2\cos^3 x + m - 2$

$\Leftrightarrow -2\cos^3 x - \cos^2 x + 3 = m \qquad (3)$

Đặt $t = \cos x$, phương trình (3) trở thành $-2t^3 - t^2 - 1 = m \qquad (4)$

Ta thấy, với mỗi $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$ thì phương trình $\cos x = t$ cho ta một nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$

Xét hàm số $g(t) = -2t^3 - t^2 + 3$ với $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ta có $g'(t) = -6t^2 - 2t$, $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	3	$\searrow$	$\frac{80}{27}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

Do đó, để phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$ điều kiện cần và đủ là phương trình (4) có đúng một nghiệm $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m \in \left[0; \frac{80}{27}\right] \end{array}\right. \Rightarrow m \in \{3; 2; 1; 0\}$ (Do m nguyên).

Chúc các em đạt kế